

Die eindimensionale Wellengleichung mit Hysterese

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium
im Fach Mathematik

eingereicht an der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
der Humboldt-Universität zu Berlin

von

Dipl.-Math. Monika Siegfanz
geboren am 30. Juni 1966 in Hannover

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin
Prof. Dr. Dr. h.c. Hans Meyer

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Prof. Dr. Bodo Krause

Gutachter/Gutachterin

1.
2.
3.

Tag der mündlichen Prüfung

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Hysteresse-Operatoren	5
2.1	Grundlegende Definitionen und Eigenschaften	6
2.2	Der Stop-Operator	9
2.3	Der Prandtl-Ishlinskii-Operator	14
2.4	Der zeitdiskrete Hysteresse-Operator	21
2.5	Die Auswertung des Prandtl-Ishlinskii-Operators	25
2.6	Untersuchungen zu den approximierenden Operatoren	51
2.7	Ortsabhängige Hysteresse-Operatoren	59
3	Die Wellengleichung mit Hysteresse	61
3.1	Ausgangsproblem	62
3.2	Voraussetzungen	67
3.3	Beispiele	69
3.4	Diskretisierung	70
4	Existenz und Eindeutigkeit	75
5	Abschätzungen	80
5.1	Hilfsmittel	80
5.2	Erste Energieabschätzung	88
5.3	Zweite Energieabschätzung	95
6	Grenzübergang	105
6.1	Hilfsmittel	106
6.2	Konvergenz	107
6.3	Fehlerabschätzung	121

7	Ein Beispielproblem	127
A	Grundlagen	135
	Literaturverzeichnis	143
	Symbolverzeichnis	147

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit entwickeln und untersuchen wir ein numerisches Schema für die eindimensionale Wellengleichung mit Hysterese auf dem Raum-Zeit-Gebiet $(0, 1) \times (0, T)$

$$\begin{aligned}\rho u_{tt}(x, t) - \sigma_x(x, t) &= g(x, t), \\ \sigma(x, t) &= \mathcal{H}[u_x(x, \cdot)](t),\end{aligned}$$

wobei u die Verschiebung, σ die Spannung, $\varepsilon := u_x$ die Verzerrung und \mathcal{H} ein Hysteresis-Operator ist. Die Massendichte ρ wird im folgenden gleich 1 gesetzt. Diese Gleichung ist ein Modell für die Longitudinal- oder Torsionsschwingungen eines homogenen Stabes unter dem Einfluß einer uniaxialen äußeren Kraftdichte g , wobei wir ein elastoplastisches Materialgesetz annehmen. Das Materialgesetz beschreibt die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung in dem betrachteten Festkörper. Ist diese Beziehung elastisch und der Körper homogen, dann ist die Spannung am Ort x zur Zeit t durch

$$\sigma(x, t) = f(\varepsilon(x, t))$$

mit einer geeigneten Funktion f gegeben.

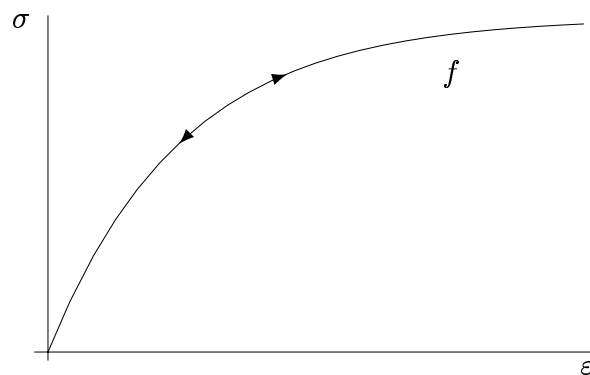


Abbildung 1.1: elastische Spannungs-Verzerrungs-Beziehung

Dieser einfache Zusammenhang entfällt, falls die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung plastische Anteile enthält. Dem Wert der Verzerrung $\varepsilon(x, t)$ läßt sich nicht mehr in eindeutiger Weise ein Spannungswert $\sigma(x, t)$ zuordnen, sondern die Beziehung hängt von

der sogenannten „Materialgeschichte“ ab. Belastungs- und Entlastungskurve sind nicht länger identisch, wie Abbildung 1.2 zeigt. Dies nennt man Hysterese.

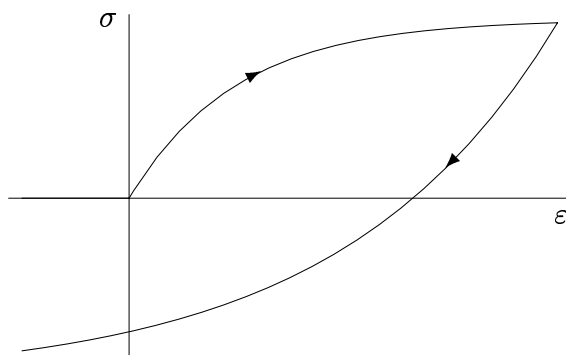


Abbildung 1.2: elastoplastische Spannungs-Verzerrungs-Beziehung

Diese rein phänomenologische Unterscheidung des Materialverhaltens läßt sich durch unterschiedliche Vorgänge im Kristallgitter erklären. Im elastischen Fall kommt es bei Belastung nur zu einer relativen Verschiebung der Atome, wobei die ursprüngliche Gitterstruktur erhalten bleibt. Die aufgewandte Energie bleibt im System gespeichert und wird bei Entlastung wieder frei. Im plastischen Fall kommt es zu Versetzungen im Kristallgitter, die bei der Belastung aufgewandte Energie wird dissipiert. Nach der Entlastung ist der Gegenstand verformt. Ausführliche Darstellungen zu physikalischen und mathematischen Modellen von Plastizität finden sich in [LC90] und [Mau92].

In unserem Ansatz werden nicht die Ursache-Wirkungs-Zusammenhänge auf der Mikroebene modelliert, sondern wir sehen das System als Black-Box an und betrachten die Reaktionen des Festkörpers auf der Makroebene, die durch die Vorgänge auf der Mikroebene verursacht werden.

Neben der möglichen Interpretation der Wellengleichung als Newtonsche Bewegungsgleichung im Rahmen der Mechanik, kann die Gleichung in die eindimensionalen Maxwellgleichungen für ein ferromagnetisches Medium transformiert werden, falls der Operator \mathcal{H} invertierbar ist (vgl. [K96, S. 110]).

Ein klassischer Zugang zur mathematischen Modellierung von Elastoplastizität baut auf der Theorie der Variationsungleichungen auf (vgl. [DL72], [Alb98]). Die zugehörige Spannungs-Verzerrungs-Beziehung kann dabei auch durch eine Abbildung, einen sogenannten Hysterese-Operator, formuliert werden (vgl. [K89]). Erstmals wurde dieser Ansatz von Krasnosel'skiĭ und seinen Mitarbeitern verfolgt (vgl. [KDEZLP70], [KP89]). Die Untersuchung der Eigenschaften von Hysterese-Operatoren ist Gegenstand aktueller Forschung (vgl. [V84], [BV89], [K90], [May91], [BK98], [DKT99]). Diese Erkenntnisse können zur Analyse von Problemen der Elastoplastizität bzw. allgemeiner von Problemen mit Hysterese-Nichtlinearitäten genutzt werden. Visintin untersuchte gekoppelte Systeme von parabolischen Gleichungen mit Hysterese-Operatoren (vgl. [V84], [V87], [V94]). Seine Methoden stellen eine Erweiterung der Ideen und Techniken dar, die aus der allgemeinen Theorie von quasilinearen, parabolischen Gleichungen stammen. Von Krejčí stammt ei-

ne Theorie für hyperbolische Gleichungen mit Hysterese-Operatoren (vgl. [K86], [K96]). Dabei werden spezifische Eigenschaften von Hysterese-Operatoren ausgenutzt, aus denen sich eine Energieabschätzung höherer Ordnung gewinnen läßt. Wegen der oben beschriebenen Energiedissipation ist die Entwicklung von temperaturabhängigen Modellen von Interesse. Die Arbeiten [KS97] und [KS98] stellen einen Einstieg in diese Thematik dar.

Bisher existieren erst wenige Ergebnisse zur Numerik von Hysterese-Operatoren. In [VV85] und [VV89] werden numerische Approximationen mit Hilfe von Rückwärtsdifferenzen in der Zeit und einem Finite-Element-Ansatz im Ort für ein gekoppeltes System aus einer parabolischen Gleichung und einem Hysterese-Operator betrachtet. In [VV85] wird dabei der eindimensionale Fall für zwei einfache Beispiele von Hysterese-Operatoren betrachtet. In [VV89] wird das Problem für beliebige Raumdimensionen behandelt, wobei der kompliziertere Preisach-Operator benutzt wird. Für diesen wird ein Approximationsverfahren konstruiert. Auch [Hue91] beschäftigt sich mit der Analyse des Preisach-Operators und der Entwicklung eines Approximationsverfahrens, zu welchem Fehlerabschätzungen hergeleitet werden. Außerdem werden Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen mit Preisach-Operator getroffen und numerische Verfahren mit quadratischer Konvergenzordnung vorgestellt. In [Zan93] wird die eindimensionale Maxwellgleichung mit Hysterese betrachtet, das Lax-Friedrichs-Verfahren zur numerischen Lösung vorgeschlagen und in einem numerischen Experiment getestet. In [Hei93] wird die numerische Behandlung von Vektor-Hysterese-Operatoren am Beispiel von speziellen, mehrdimensionalen Prandtl-Ishlinskii-Operatoren untersucht. Es werden einige Beispiele plastischer Verformung berechnet. Dazu wird das zweidimensionale, quasistatische Problem $-\operatorname{div} \sigma = g$ durch ein Differenzenverfahren approximiert.

In dieser Arbeit wird ein konvergentes numerisches Verfahren für die eindimensionale Wellengleichung mit Hysterese-Operator für verschiedene Arten von Randbedingungen vorgestellt. Diese Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil werden Hysterese-Operatoren allgemein eingeführt und eine spezielle Klasse von Hysterese-Operatoren, die Prandtl-Ishlinskii-Operatoren, näher untersucht. Wir bestimmen ihre Gedächtnisstruktur und geben einen Algorithmus an, wie sich eine Input-Folge von diskreten Verzerrungswerten auf eine zur Erhaltung des Gedächtnisses minimale Folge reduzieren läßt. Der Algorithmus kann zur Implementierung des Operators genutzt werden. Wir stellen zwei verschiedene Ansätze zur Approximation von Prandtl-Ishlinskii-Operatoren vor. Wir führen aus, wie sich diese approximierenden Operatoren implementieren lassen und leiten lineare Fehlerabschätzungen her. Unter einer Zusatzannahme erhalten wir eine quadratische Fehlerabschätzung. Zusätzlich geben wir an, wie sich der Prandtl-Ishlinskii-Operator im konkreten Anwendungsfall aus Materialdaten identifizieren läßt. Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Kopplung einer bestimmten Klasse von Hysterese-Operatoren mit der eindimensionalen Wellengleichung. Zur numerischen Lösung des Problems benutzen wir ein implizites Differenzenverfahren mit Gedächtnis. Das vorgestellte numerische Verfahren wurde dabei im Hinblick auf die Klasse der Prandtl-Ishlinskii-Operatoren entwickelt. Wir haben unseren Ansatz für allgemeine Hysterese-Operatoren gestaltet, um die konkreten Eigenschaften der Operatoren, die wir in den Beweisen nutzen, klar herauszuarbeiten. Wir diskutieren, wie das vorgestellte Verfahren auf die Prandtl-Ishlinskii-Operatoren angewendet werden kann. Wir benutzen die klassische Methode mittels A-

priori-Abschätzungen, Kompaktheitsschlüssen, Monotonieargumenten und Grenzübergang die Konvergenz des Verfahrens zu beweisen. Dazu übertragen wir die in [K96] und [BS96] für semidiskrete Approximationen entwickelten Ideen auf unser volldiskretes Schema.

Im einzelnen ist diese Arbeit folgendermaßen aufgebaut:

Im Kapitel 1 führen wir in die Theorie der Hysterese-Operatoren ein. Im Kapitel 2 stellen wir das betrachtete Problem aus der Kopplung der Wellengleichung mit einem Hysterese-Operator sowie das entwickelte numerische Schema vor. Die für die nachfolgenden Beweise benötigten Voraussetzungen an die Hysterese-Operatoren werden genannt und Beispiele konstruiert, die diese Voraussetzungen erfüllen. Im Kapitel 3 wird der Beweis zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des numerischen Schemas geführt. Basierend auf den im Kapitel 4 hergeleiteten Abschätzungen, führen wir im Kapitel 5 mit Hilfe von Kompaktheitsschlüssen und einem an die Monotonie-Methode von Minty und Browder angelehnten Argument den Grenzübergang durch. Wir beweisen die Wohlgestelltheit des Problems und leiten eine Fehlerabschätzung der Ordnung $1/2$ her. Im Kapitel 6 finden sich die numerischen Resultate zu einem Beispielproblem, von dem auch die exakte Lösung bestimmt wird. Eine Zusammenstellung der Grundlagen findet sich im Anhang A.

Kapitel 2

Hysteresese-Operatoren

Der Grundstein für eine systematische Theorie der Hysteresese-Operatoren wurde in den siebziger Jahren von Krasnosel'skiĭ und seinen Mitarbeitern gelegt. Diese Theorie, insbesondere die Kopplung von Hysteresese-Operatoren mit partiellen Differentialgleichungen, wurde von Visintin für parabolische Probleme und von Krejčí für hyperbolische Probleme weiterentwickelt. Zusammenfassende Darstellungen finden sich in [KP89], [V94], [K96], [BS96] und ein anwendungsorientierter Zugang in [May91].

Hysteresese-Operatoren dienen zur Modellierung von Hysteresese-Phänomenen, wie sie zum Beispiel im Ferromagnetismus und in der Elastoplastizität aber auch in zahlreichen anderen Bereichen auftreten. In unserem Zusammenhang dienen Hysteresese-Operatoren zur Modellierung des elastoplastischen Anteils des konstitutiven Materialgesetzes.

Dieses Kapitel gliedert sich folgendermaßen: Im Abschnitt 2.1 findet sich eine Definition des Begriffs „Hysteresese-Operator“ und anderer grundlegender Begriffe, sowie eine Charakterisierung des lokalen Verhaltens von Hysteresese-Operatoren. In den Abschnitten 2.2 und 2.3 finden sich Beispiele für Hysteresese-Operatoren, die wir in dieser Arbeit näher untersuchen wollen. Aus ihnen lassen sich Operatoren konstruieren, die die Voraussetzungen für die Existenz-, Eindeutigkeits- und Konvergenzaussagen sowie die Fehlerabschätzung im zweiten Teil dieser Arbeit erfüllen. Da wir ein numerisches Schema für ein gekoppeltes System aus einem Hysteresese-Operator und der eindimensionalen Wellengleichung entwickeln wollen, führen wir im Abschnitt 2.4 zeitdiskrete Hysteresese-Operatoren ein, so daß die grundlegenden Eigenschaften der Hysteresese-Operatoren in einer diskreten Form erhalten bleiben. Im Abschnitt 2.5 untersuchen wir, wie sich eine konkrete Klasse von diskreten Hysteresese-Operatoren auswerten läßt. Diese Untersuchungen können als Grundlage zur numerischen Implementierung dienen. Dazu werden approximierende Operatoren betrachtet. Im Abschnitt 2.6 werden die approximierenden Operatoren untersucht und insbesondere Fehlerabschätzungen hergeleitet. Das Kapitel schließt im Abschnitt 2.7 mit einer Definition von ortsabhängigen Hysteresese-Operatoren und einer Regularitätsaussage, auf die wir im zweiten Teil dieser Arbeit zurückgreifen werden.

2.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

In dieser Arbeit bezeichnet $T > 0$ den rechten Randpunkt des betrachteten, endlichen Zeitintervalls. Hysteresse-Operatoren bilden Zeitfunktionen in Zeitfunktionen ab, wobei die Output-Funktion zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ von der Input-Funktion im Zeitintervall $[0, t]$ abhängt und die Output-Funktion invariant unter Zeitskalenänderungen bleibt. Zusätzlich kann die Abbildung von einem Parameter y abhängig sein. Dieses motiviert die folgende Definition.

Definition 2.1.1 Sei $Abb(0, T)$ die Menge der Abbildungen vom Intervall $[0, T]$ nach \mathbb{R} . Seien $X \subset Abb(0, T)$, $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, (Y, d) ein metrischer Raum und \mathcal{H} eine Abbildung, $\mathcal{H} : Y \times X \rightarrow X$.

- (i) \mathcal{H} heißt **ratenunabhängig**, wenn für jedes $u \in X$ und für jede nicht fallende, stetige und surjektive Funktion $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T]$ mit $u \circ \alpha \in X$ gilt

$$\mathcal{H}[y; u \circ \alpha](t) = \mathcal{H}[y; u](\alpha(t)) \quad \text{für alle } y \in Y.$$

- (ii) \mathcal{H} heißt **Volterra-Operator**, wenn die folgende Implikation für jedes $\tilde{t} \in [0, T]$ gilt:

$$\begin{aligned} u, v \in X, \quad u(t) = v(t) \quad \text{für alle } t \in [0, \tilde{t}] \\ \implies \mathcal{H}[y; u](\tilde{t}) = \mathcal{H}[y; v](\tilde{t}) \quad \text{für alle } y \in Y. \end{aligned}$$

- (iii) \mathcal{H} heißt **Hysteresse-Operator**, wenn \mathcal{H} ratenunabhängig und Volterra-Operator ist.

Ist zusätzlich $Y = \emptyset$, also $\mathcal{H} : X \rightarrow X$, dann heißt \mathcal{H} **Hysteresse-Operator mit gedächtnisfreiem Anfangswert**.

Der Parameter $y \in Y$ heißt **Anfangswert der inneren Variablen**.

Bemerkung 2.1.2 Die Definition 2.1.1 läßt sich auf Banachräume $X \subset Abb(0, T; \mathbb{R}^n)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinern, wobei $Abb(0, T; \mathbb{R}^n)$ die Menge der Abbildungen vom Intervall $[0, T]$ nach \mathbb{R}^n bezeichne. Da wir uns in dieser Arbeit ausschließlich mit eindimensionalen Hysteresse-Operatoren beschäftigen, haben wir uns in der Definition auf den Fall $n = 1$ beschränkt.

Beispiel 2.1.3 Für jede Lipschitz-stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und jedes $p \in [1, \infty]$ ist der Superpositions-Operator $S : L^p(0, T) \rightarrow L^p(0, T)$, $S[u](t) := f(u(t))$ ein Hysteresse-Operator.

Bemerkung 2.1.4 Das vorangehende Beispiel zeigt, daß zu den Hysteresse-Operatoren auch Operatoren zählen, mit denen keine „echten“ Hysteresephänomene modelliert werden können. In den Abschnitten 2.2 und 2.3 werden wir die Stop- und die Prandtl-Ishlinskii-Operatoren einführen. Dies sind Beispiele für Hysteresse-Operatoren, die keine Superpositions-Operatoren sind. Es sind die Operatoren, die uns vor allem interessieren,

da mit ihnen ratenunabhängige Hysteresephänomene modelliert werden können. In der Natur finden sich auch ratenabhängige Hysteresephänomene. Diese können nicht durch Hysteresese-Operatoren modelliert werden.

Das nun folgende Lemma 2.1.5 zeigt, daß sich jeder Hysteresese-Operator mit gedächtnisfreiem Anfangswert, dessen Definitionsbereich eine Teilmenge der stetigen Funktionen ist, in den Monotonie-Intervallen der Input-Funktion wie ein Superpositions-Operator verhält. Dort kann er also durch eine Funktion beschrieben werden.

Auf X führen wir eine Äquivalenzrelation ein, indem wir definieren:

$$u \sim v \quad : \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Es existieren nicht fallende, stetige und surjektive Funktionen,} \\ \text{die Zeittransformationen } \alpha_1, \alpha_2 : [0, T] \rightarrow [0, T], \text{ so daß} \\ v \circ \alpha_1 = u \circ \alpha_2 \in X. \end{array}$$

Wegen der Ratenunabhängigkeit von \mathcal{H} gilt für zwei Funktionen u, v aus derselben Äquivalenzklasse für alle $t \in [0, T]$

$$(v(\tau_1), \mathcal{H}[v](\tau_1)) = (u(\tau_2), \mathcal{H}[u](\tau_2)) \quad \text{mit } v \circ \alpha_1 = u \circ \alpha_2, \tau_i = \alpha_i(t), i = 1, 2.$$

Insbesondere stimmen die Spuren $|\gamma| := \{(u(t), \mathcal{H}[u](t)) : t \in [0, T]\}$ der Kurven

$$\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (u(t), \mathcal{H}[u](t)),$$

für alle Funktionen u derselben Äquivalenzklasse überein. Es unterscheidet sich nur die Parametrisierung der Zeit, mit der sie durchlaufen werden. Wenn wir wissen, wie ein ratenunabhängiger Operator auf einen möglichst einfachen Repräsentanten jeder Äquivalenzklasse wirkt, ist er vollständig definiert.

Eine stetige, stückweise monotone Funktion u ist zum Beispiel nach [BS96, Lemma 4.2.4] zu genau all den stetigen Funktionen äquivalent, die über dieselbe endliche Folge von lokalen Extremwerten (e_0, \dots, e_N) verfügen. Dabei ist die Folge der lokalen Extremwerte

$$(e_0, \dots, e_N) = (u(t_0), \dots, u(t_N))$$

eindeutig definiert durch die Bedingungen

- $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$
- u monoton in (t_{i-1}, t_i) , $i = 1, \dots, N$,
- Falls $N \geq 2$ ist, gilt: $(u(t_{i+1}) - u(t_i))(u(t_i) - u(t_{i-1})) < 0$ für $i = 1, \dots, N - 1$.

Eine stetige, stückweise affine Funktion, die über dieselbe endliche Folge (e_0, \dots, e_N) von lokalen Extremwerten verfügt, wäre also ein geeigneter Repräsentant dieser Äquivalenzklasse in $C([0, T])$. Im folgenden Lemma verstehen wir unter einer (streng) monotonen Funktion, eine (streng) monoton wachsende oder eine (streng) monoton fallende Funktion.

Lemma 2.1.5 Seien $v \in X \subset C([0, T])$, $\mathcal{H} : X \rightarrow X$ ratenunabhängig, v streng monoton in $I := [t_1, t_2] \subset [0, T]$ und $W := v(I) \subset \mathbb{R}$. Dann existiert eine Funktion $g : W \rightarrow \mathbb{R}$, so daß für alle Funktionen $\tilde{v} \in X$ mit

$$\tilde{v}(t) = v(t) \quad \text{in } [0, T] \setminus (t_1, t_2) \quad \text{und} \quad \tilde{v} \text{ monoton in } I$$

gilt

$$\mathcal{H}[\tilde{v}](t) = g(\tilde{v}(t)) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Beweis:

Es existiert die Umkehrfunktion $(v|_I)^{-1} : W \rightarrow I$ von $v|_I$. $(v|_I)^{-1}$ ist stetig, streng monoton und surjektiv. Wegen der Voraussetzungen an \tilde{v} ist $\tilde{v}(I) = v(I) = W$. Wir definieren die nicht fallende, stetige und surjektive Funktion $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T]$ durch

$$\alpha(t) := \begin{cases} t, & \text{falls } t \in [0, t_1] \cup [t_2, T], \\ ((v|_I)^{-1} \circ \tilde{v})(t), & \text{falls } t \in (t_1, t_2). \end{cases}$$

α ist stetig und monoton. Da $\alpha(t_i) = t_i$, für $i = 1, 2$, gilt, folgt daraus die Surjektivität und die wachsende Monotonie von α .

Es ist $\alpha(I) = I$ und $v \circ \alpha = \tilde{v}$. Wir definieren:

$$g : \begin{cases} W & \rightarrow \mathbb{R}, \\ w & \mapsto \mathcal{H}[v]((v|_I)^{-1}(w)). \end{cases}$$

Dann gilt wegen der Ratenunabhängigkeit von \mathcal{H} für alle $t \in I$

$$\mathcal{H}[\tilde{v}](t) = \mathcal{H}[v \circ \alpha](t) = \mathcal{H}[v](\alpha(t)) = g(v(\alpha(t))) = g((v \circ \alpha)(t)) = g(\tilde{v}(t)).$$

□

Für Hysterese-Operatoren, deren Definitionsbereich die stückweise affinen Funktionen enthält, ergibt sich die Funktion g aus Lemma 2.1.5 als die Einschränkung des im folgenden definierten Begriffes „Zweig“ des Hysterese-Operators \mathcal{H} auf das Intervall W .

Definition 2.1.6 Seien $W^{1,1}(0, T) \subset X \subset C([0, T])$ und $\mathcal{H} : Y \times X \rightarrow X$ ein Hysterese-Operator. Für $0 \leq t_1 < T$ und $v \in W^{1,1}(0, t_1)$ definieren wir für jedes $z \in \mathbb{R}$ eine Funktion $v_z \in W^{1,1}(0, T)$ durch

$$v_z(t) := \begin{cases} v(t), & \text{falls } t \leq t_1 \\ v(t_1) + \frac{t-t_1}{T-t_1}(z - v(t_1)), & \text{falls } t_1 < t \leq T \end{cases} \quad (2.1)$$

Die Funktion $\Phi_{v,y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei für $y \in Y$ definiert durch

$$\Phi_{v,y}(z) := \mathcal{H}[y; v_z](T). \quad (2.2)$$

$\Phi_{v,y}$ heißt **Zweig des Hysterese-Operators \mathcal{H} zur Vergangenheit v und zum Anfangswert y** .

Für Hysterese-Operatoren mit gedächtnisfreiem Anfangswert definieren wir den **Zweig des Hysterese-Operators \mathcal{H} zur Vergangenheit v** durch

$$\Phi_v : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ z & \mapsto \mathcal{H}[v_z](T). \end{cases} \quad (2.3)$$

Ist $t_1 = 0$, so heißt der Zweig Φ_v **gedächtnisfrei**.

Hängt $\Phi_{v,y}$ bzw. Φ_v nur von $(v(t_1), \mathcal{H}[v](t_1))$ ab, so sagen wir, der Hysterese-Operator \mathcal{H} hat ein **lokales Gedächtnis**. Andernfalls sagen wir, der Hysterese-Operator \mathcal{H} hat ein **nichtlokales Gedächtnis**.

Bemerkung 2.1.7 Für den in Beispiel 2.1.3 genannten Superpositions-Operator gilt für jedes $v \in L^p(0, T)$

$$\Phi_v(z) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}.$$

2.2 Der Stop-Operator

In diesem Abschnitt bezeichnet der Punkt über einem Funktionssymbol die Ableitung dieser Funktion nach der Zeit t .

Der im folgenden definierte eindimensionale Stop-Operator ist das einfachste Beispiel für einen Hysterese-Operator, wie er in unserem Kontext Verwendung findet. Der Beweis einer Verallgemeinerung des folgenden Satzes findet sich für gedächtnisfreie Anfangswerte in [K91, Prop. 2.2] und in allgemeiner Form in [K96, Th. I.1.9].

Satz 2.2.1 Seien $r > 0$ und $T > 0$. Zu jedem $\sigma_r^0 \in [-r, r]$ und $\varepsilon \in W^{1,1}(0, T)$ definiert die Variationsungleichung (2.5) in Verbindung mit (2.4), (2.6) eine eindeutige Funktion $\sigma_r \in W^{1,1}(0, T)$:

$$\sigma_r(t) \in [-r, r] \quad \text{für alle } t \in [0, T], \quad (2.4)$$

$$(\dot{\varepsilon} - \dot{\sigma}_r)(\sigma_r - \tilde{\sigma}) \geq 0 \quad \text{für alle } \tilde{\sigma} \in [-r, r] \quad \text{f.ü. in } (0, T), \quad (2.5)$$

$$\sigma_r(0) = \sigma_r^0. \quad (2.6)$$

Der **Stop-Operator** $\mathfrak{s}_r : \begin{cases} [-r, r] \times W^{1,1}(0, T) & \rightarrow W^{1,1}(0, T) \\ (\sigma_r^0, \varepsilon) & \mapsto \sigma_r \end{cases}$ ist definiert als der zugehörige Lösungsoperator.

r heißt **Fließgrenze**.

Ist $\sigma_r^0 := \text{sign}(\varepsilon(0)) \min\{r, |\varepsilon(0)|\}$ mit

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ -1, & \text{falls } x \leq 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

dann heißt \mathfrak{s}_r **Stop-Operator mit gedächtnisfreiem Anfangswert**. In diesem Fall hängt der Stop-Operator nur von ε ab. Zur Vereinfachung halten wir die Bezeichnung bei und schreiben $\mathfrak{s}_r[\varepsilon]$ statt $\mathfrak{s}_r[\sigma_r^0; \varepsilon]$.

Bemerkung 2.2.2 Der Stop-Operator dient als Basiselement zur Modellierung von Elastoplastizität und entspricht genau dem sogenannten „Prandtl’schen Modell der perfekten Elastoplastizität“. Im hier betrachteten eindimensionalen Fall können mit ihm irreversible Beziehungen zwischen der skalaren Verzerrung ε und der skalaren Spannung σ_r modelliert werden. Die Fließgrenze r ist derjenige Spannungswert, bei dem der Übergang vom linear-elastischen zum perfekt-plastischen Materialverhalten stattfindet.

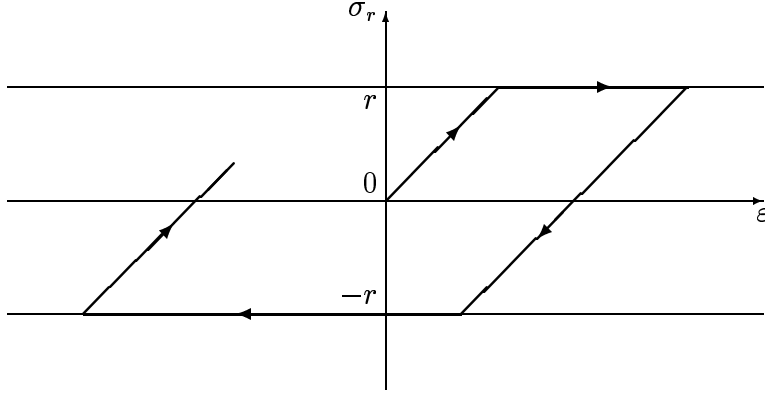


Abbildung 2.1: Input-Output-Verhalten des Stop-Operators \mathfrak{s}_r

Übersteigt die Verzerrungsfunktion ε bei gedächtnisfreiem Anfangswert die Fließgrenze r , also den Schwellwert zum plastischen Bereich, dann ist die Entlastungskurve nicht mit der Belastungskurve identisch. Bei Erreichen des spannungsfreien Zustandes $\sigma_r = 0$ bleibt eine Restverzerrung $\varepsilon > 0$ zurück.

Bemerkung 2.2.3 Materialgesetze, wie sie zum Beispiel durch den Stop-Operator gegeben sind, lassen sich auch mit sogenannten rheologischen Modellen beschreiben. Rheologische Modelle dienen zur Veranschaulichung und zur Konstruktion von Materialgesetzen. Das rheologische Modell des Stop-Operators ist die serielle Kombination eines Feder-Elementes mit Federkonstante 1 (elastisches Element) mit einem trockenereibungselement (starr-plastisches-Element). Mit diesem Modell kann Material beschrieben werden, bei dem die Fließgrenze r fest und nicht von der Materialgeschichte abhängig ist. Für eine detaillierte Darstellung dieser Zusammenhänge sei auf [LC90, Sect. 3.3], [V94, Chap. II] und [K96, Sect. I.1] verwiesen.

Bemerkung 2.2.4 Für stückweise monotone Input-Funktionen ε ergibt sich direkt aus den Bedingungen (2.4) - (2.6), daß sich die Output-Funktion $\mathfrak{s}_r[\sigma_r^0; \varepsilon]$ in jedem Monotonie-Intervall $[t_0, t_1] \subset [0, T]$ explizit durch den folgenden Ausdruck bestimmen läßt:

$$\mathfrak{s}_r[\sigma_r^0; \varepsilon](t) = \begin{cases} \min\{r, \mathfrak{s}_r[\sigma_r^0; \varepsilon](t_0) + \varepsilon(t) - \varepsilon(t_0)\}, & t \in [t_0, t_1], \\ \text{falls } \varepsilon \text{ nicht fallend in } [t_0, t_1], \\ \max\{-r, \mathfrak{s}_r[\sigma_r^0; \varepsilon](t_0) + \varepsilon(t) - \varepsilon(t_0)\}, & t \in [t_0, t_1], \\ \text{falls } \varepsilon \text{ nicht wachsend in } [t_0, t_1], \end{cases} \quad (2.8)$$

$$= \max\{-r, \min\{r, \mathfrak{s}_r[\sigma_r^0; \varepsilon](t_0) + \varepsilon(t) - \varepsilon(t_0)\}\}.$$

Die Funktion $\Phi_{\varepsilon|_{[0,t_0]}, \sigma_r^0} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \max\{-r, \min\{r, \mathfrak{s}_r[\sigma_r^0; \varepsilon](t_0) + x - \varepsilon(t_0)\}\} \end{cases}$ ist demnach der Zweig des Stop-Operators \mathfrak{s}_r zur Vergangenheit $\varepsilon|_{[0,t_0]}$ und zum Anfangswert σ_r^0 .

Der Stop-Operator \mathfrak{s}_r , $r > 0$, hat also im Sinne von Definition 2.1.6 ein lokales Gedächtnis.

Mit Hilfe von (2.8) läßt sich außerdem zeigen, daß der Stop-Operator \mathfrak{s}_r nicht Gâteaux-differenzierbar und damit auch nicht Fréchet-differenzierbar ist. Damit stehen uns die klassischen analytischen Werkzeuge, wie der Satz über implizite Funktionen oder die Kettenregel (vgl. [Zei86, Chap. 4]), nicht zur Verfügung.

Im nächsten Abschnitt werden die analytischen Eigenschaften des Stop-Operators vorgestellt, auf die wir statt dessen zurückgreifen können.

2.2.1 Analytische Eigenschaften des Stop-Operators

Für $\varepsilon \in C([0, T])$ sei im folgenden $\|\varepsilon\|_\infty := \sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon(t)|$ gesetzt. In diesem Abschnitt bezeichnet r eine positive, reelle Zahl.

Lemma 2.2.5 *Für jedes $r > 0$ ist der Operator \mathfrak{s}_r ungerade. Für jedes $\varepsilon \in W^{1,1}(0, T)$ gilt also*

$$\mathfrak{s}_r[-\varepsilon] = -\mathfrak{s}_r[\varepsilon].$$

Beweis:

Sei $\sigma_r := \mathfrak{s}_r[\varepsilon]$. Nach der Definition des Stop-Operators erfüllt σ_r die Bedingung (2.4) und das Paar (ε, σ_r) die Variationsungleichung

$$(\dot{\varepsilon} - \dot{\sigma}_r)(\sigma_r + \tilde{\sigma}) \geq 0 \quad \text{für alle } \tilde{\sigma} \in [-r, r] \quad \text{f.ü. in } (0, T).$$

Also erfüllt auch $-\sigma_r$ die Bedingung (2.4) und das Paar $(-\varepsilon, -\sigma_r)$ die Variationsungleichung

$$\begin{aligned} (-\dot{\varepsilon} - (-\dot{\sigma}_r))(-\sigma_r - \tilde{\sigma}) &= (\dot{\varepsilon} - \dot{\sigma}_r)(\sigma_r + \tilde{\sigma}) \geq 0 \\ &\quad \text{für alle } \tilde{\sigma} \in [-r, r] \quad \text{f.ü. in } (0, T), \end{aligned}$$

und es ist $-\sigma_r(0) = \text{sign}(-\varepsilon(0)) \min\{r, |\varepsilon(0)|\}$. Also ist $-\sigma_r = \mathfrak{s}_r[-\varepsilon]$. □

Der Beweis der folgenden Proposition findet sich zum Beispiel in [BS96] und [K96].

Proposition 2.2.6

(i) *Für jedes $\varepsilon \in W^{1,1}(0, T)$, $\sigma_r := \mathfrak{s}_r[\varepsilon]$, erfüllt der Stop-Operator mit gedächtnisfreiem Anfangswert die **Energie-Ungleichung***

$$\sigma_r(t) (\dot{\varepsilon}(t) - \dot{\sigma}_r(t)) \geq 0 \quad \text{f.ü. in } (0, T) \tag{2.9}$$

und ist lokal monoton im folgenden Sinne:

$$0 \leq (\dot{\sigma}_r(t))^2 = \dot{\varepsilon}(t) \dot{\sigma}_r(t) \quad \text{f.ü. in } (0, T). \tag{2.10}$$

(ii) Für beliebige $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in W^{1,1}(0, T)$ und $\sigma_r^i := \mathfrak{s}_r[\varepsilon_i]$, $i = 1, 2$, gilt eine weitere Monotoniebedingung:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\sigma_r^1 - \sigma_r^2)^2(t) \leq (\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2)(t) (\sigma_r^1 - \sigma_r^2)(t) \quad \text{f.ü. in } (0, T), \quad (2.11)$$

sowie die Abschätzungen

$$\int_0^T |\dot{\sigma}_r^1(t) - \dot{\sigma}_r^2(t)| dt \leq |\varepsilon_1(0) - \varepsilon_2(0)| + 2 \int_0^T |\dot{\varepsilon}_1(t) - \dot{\varepsilon}_2(t)| dt, \quad (2.12)$$

$$|\sigma_r^1(t) - \sigma_r^2(t)| \leq 2 \max_{0 \leq \tau \leq t} |\varepsilon_1(\tau) - \varepsilon_2(\tau)|, \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \quad (2.13)$$

$$|\sigma_r^1(t) - \sigma_r^2(t)| \leq |\varepsilon_1(0) - \varepsilon_2(0)| + \int_0^t |\dot{\varepsilon}_1(\tau) - \dot{\varepsilon}_2(\tau)| d\tau \quad (2.14)$$

für alle $t \in [0, T]$.

Bemerkung 2.2.7 Interpretieren wir den Stop-Operator als ein Materialgesetz, wobei der Stop-Operator jeder Verzerrungsfunktion ε eine Spannungsfunktion σ_r zuordnet, und nehmen wir $\mathcal{F}[\varepsilon] := \frac{1}{2} (\mathfrak{s}_r[\varepsilon])^2$ als die zugehörige freie Energiedichte an, dann sichert die Ungleichung (2.9) die thermodynamische Konsistenz dieses Modells, also die Vereinbarkeit mit dem 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik (vgl. Abschnitt 5.2.8, [BS96, Sect. 2.5 und Sect. 4.1] und [K96, Sect. I.1]). Deshalb wird die Ungleichung (2.9) als Energie-Ungleichung bezeichnet.

Bemerkung 2.2.8 Da der Raum $W^{1,1}(0, T)$ dicht im Banachraum $(C([0, T]), \|\cdot\|_\infty)$ liegt, besitzt der nach Abschätzung (2.13) Lipschitz-stetige Stop-Operator $\mathfrak{s}_r : W^{1,1}(0, T) \rightarrow C([0, T])$ eine eindeutige Lipschitz-stetige Fortsetzung auf $C([0, T])$. Die Abschätzung (2.13) bleibt für beliebige Funktionen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in C([0, T])$ gültig (vgl. [Alt92, Ü 2.3]).

Aus der Beschreibung des Stop-Operators in (2.8) folgt unmittelbar, daß der Stop-Operator \mathfrak{s}_r , $r > 0$, für stückweise monotone Input-Funktionen $u \in W^{1,1}(0, T)$ die Bedingungen (i), (ii) aus Definition 2.1.1 der Hysterese-Operatoren erfüllt. Da die Menge der stückweise monotonen Funktionen aus $W^{1,1}(0, T)$ dicht in $C([0, T])$, $\|\cdot\|_\infty$ liegt, liefert Abschätzung (2.13), daß der auf $C([0, T])$ fortgesetzte Stop-Operator ein ratenunabhängiger Volterra-Operator und damit ein Hysterese-Operator ist.

Lemma 2.2.9 (stetige Abhängigkeit des Stop-Operators von der Fließgrenze)
Für alle $q, r > 0$ und $\varepsilon \in C([0, T])$ gilt

$$|(\mathfrak{s}_r[\varepsilon] - \mathfrak{s}_q[\varepsilon])(t)| \leq |r - q| \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \quad (2.15)$$

Beweis:

Aus [BS96, Th. 2.3.2] bzw. [K96, Cor. II.2.2] ergibt sich für den Play-Operator \mathfrak{p}_r mit gedächtnisfreiem Anfangswert, $\mathfrak{p}_r[\varepsilon] := \varepsilon - \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t)$, für jedes $\varepsilon \in C([0, T])$ und $0 < q < r$

$$|\mathfrak{p}_r[\varepsilon](t) - \mathfrak{p}_q[\varepsilon](t)| \leq r - q \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Daraus folgt direkt die Abschätzung (2.15). □

Bemerkung 2.2.10 Der Stop-Operator ist nicht monoton im L^2 -Sinn, d. h.

$$\int_0^T (\mathfrak{s}_r[\varepsilon_2] - \mathfrak{s}_r[\varepsilon_1])(t) (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(t) dt$$

wechselt in Abhängigkeit von $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ das Vorzeichen.

Beispiel 2.2.11 Für $r > 0$ definieren wir die Funktionen

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t) &= 0 \quad \text{für alle } t \in [0, T], \\ \varepsilon_2(t) &= \begin{cases} 3r - at, & \text{falls } 0 \leq t < 2\frac{r}{a}, \\ r, & \text{falls } 2\frac{r}{a} \leq t \leq T, \end{cases} \quad \text{für ein } a > 8\frac{r}{T}, \\ \varepsilon_3(t) &= t \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung liefert

$$\begin{aligned} \int_0^T (\mathfrak{s}_r[\varepsilon_2] - \mathfrak{s}_r[\varepsilon_1])(t) (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(t) dt &< 0, \\ \int_0^T (\mathfrak{s}_r[\varepsilon_3] - \mathfrak{s}_r[\varepsilon_1])(t) (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(t) dt &> 0. \end{aligned}$$

Allerdings ist der Stop-Operator auf dem Raum $W^{1,1}(0, T)$ lokal monoton im Sinne von Ungleichung (2.10). Im folgenden Lemma findet sich eine diskrete Version der lokalen Monotonie für beliebige stetige Funktionen.

Lemma 2.2.12 Für jedes $r > 0$ und jede Funktion $\varepsilon \in C([0, T])$, die im Intervall $[t_1, t_2]$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, monoton ist, ist der Stop-Operator im folgenden Sinne **diskret lokal monoton**:

$$(\mathfrak{s}_r[\varepsilon](t_2) - \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t_1)) (\varepsilon(t_2) - \varepsilon(t_1)) \geq 0.$$

Beweis:

Die Aussage folgt sofort aus (2.8).

Für $\varepsilon(t_2) \geq \varepsilon(t_1)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t_2) - \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t_1) &= \min\{r, \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t_1) + \varepsilon(t_2) - \varepsilon(t_1)\} - \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t_1) \\ &\geq \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t_1) - \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t_1) = 0. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon(t_2) < \varepsilon(t_1)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t_2) - \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t_1) &= \max\{-r, \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t_1) + \varepsilon(t_2) - \varepsilon(t_1)\} - \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t_1) \\ &\leq \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t_1) - \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t_1) = 0. \end{aligned}$$

Dies liefert die Behauptung. □

Aus der für Input-Funktionen aus $W^{1,1}(0, T)$ gültigen Energie-Ungleichung (2.9) läßt sich die folgende diskrete Energie-Ungleichung des Stop-Operators für beliebige stetige Input-Funktionen gewinnen.

Korollar 2.2.13 (diskrete Energie-Ungleichung Stop-Operator) Für jedes $r > 0$ und jede Funktion $\varepsilon \in C([0, T])$, die im Intervall $[t_1, t_2]$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, monoton ist, gilt die folgende Ungleichung mit $\sigma_r := \mathfrak{s}_r[\varepsilon]$:

$$\frac{1}{2} (\sigma_r^2(t_2) - \sigma_r^2(t_1)) \leq \sigma_r(t_2) (\varepsilon(t_2) - \varepsilon(t_1)) . \quad (2.16)$$

Beweis:

1. Fall: $\varepsilon(t_1) \neq \varepsilon(t_2)$.

Die Funktion $\hat{\varepsilon} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\hat{\varepsilon}(t) := \begin{cases} \varepsilon(t_1) + \frac{t-t_1}{t_2-t_1} (\varepsilon(t_2) - \varepsilon(t_1)) , & \text{falls } t \in (t_1, t_2) , \\ \varepsilon(t) , & \text{falls } t \in [0, T] \setminus (t_1, t_2) . \end{cases}$$

$\hat{\varepsilon}$ ist streng monoton in (t_1, t_2) und $\hat{\varepsilon}|_{(t_1, t_2)} \in W^{1,1}(t_1, t_2)$.

Sei $\hat{\sigma}_r := \mathfrak{s}_r[\hat{\varepsilon}]$. Es ist $\hat{\sigma}_r|_{(t_1, t_2)} \in W^{1,1}(t_1, t_2)$. Nach Lemma 2.1.5 gilt

$$\hat{\sigma}_r(t_1) = \sigma_r(t_1) \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}_r(t_2) = \sigma_r(t_2) .$$

Wir nutzen die lokale Monotonie des Stop-Operators, die sich direkt aus der Beziehung (2.10) ergibt.

Ist $\hat{\varepsilon}$ monoton wachsend (fallend) in (t_1, t_2) , dann ist es auch $\hat{\sigma}_r$. Insbesondere gilt also in beiden Fällen $\hat{\sigma}_r(t) \frac{d}{dt} \hat{\varepsilon}(t) \leq \hat{\sigma}_r(t_2) \frac{d}{dt} \hat{\varepsilon}(t)$ für fast alle $t \in (t_1, t_2)$. Zusammen mit der Energie-Ungleichung (2.9) folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\sigma_r^2(t_2) - \sigma_r^2(t_1)) &= \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_r^2(t_2) - \hat{\sigma}_r^2(t_1)) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_r^2 \right) (t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \hat{\sigma}_r(t) \left(\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_r \right) (t) dt \stackrel{(2.9)}{\leq} \int_{t_1}^{t_2} \hat{\sigma}_r(t) \left(\frac{d}{dt} \hat{\varepsilon} \right) (t) dt \\ &\stackrel{\text{s.o.}}{\leq} \hat{\sigma}_r(t_2) (\hat{\varepsilon}(t_2) - \hat{\varepsilon}(t_1)) = \sigma_r(t_2) (\varepsilon(t_2) - \varepsilon(t_1)) . \end{aligned}$$

2. Fall: $\varepsilon(t_1) = \varepsilon(t_2)$.

Dann ist $\varepsilon \equiv \varepsilon(t_1)$ in $[t_1, t_2]$. Also ist auch $\sigma_r \equiv \sigma_r(t_1)$ in $[t_1, t_2]$ und die Ungleichung (2.16) ist erfüllt. \square

2.3 Der Prandtl-Ishlinskii-Operator

Im Gegensatz zum Stop-Operator, der über ein lokales Gedächtnis im Sinne von Definition 2.1.6 verfügt, besitzt der im folgenden definierte Hysterese-Operator ein nichtlokales Gedächtnis.

Definition 2.3.1 Zu $\varepsilon \in C([0, T])$ und $t \in [0, T]$ definieren wir die **Gedächtnisfunktion** γ_t zum Zeitpunkt t durch

$$\gamma_t : \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} & \rightarrow \mathbb{R} , \\ r & \mapsto \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) . \end{cases} \quad (2.17)$$

Wir nennen die so definierte Gedächtnisfunktion auch **Gedächtnisfunktion mit gedächtnisfreiem Anfangswert**.

Lemma 2.3.2 Die Gedächtnisfunktion γ_t zu einer Funktion $\varepsilon \in C([0, T])$ ist für jedes $t \in [0, T]$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 und beschränkt.

Beweis:

Die Lipschitz-Stetigkeit der Gedächtnisfunktion folgt direkt aus Lemma 2.2.9. Danach gilt für jedes $\varepsilon \in C([0, T])$ und $t \in [0, T]$ für $r, q > 0$

$$|\gamma_t(r) - \gamma_t(q)| = |\mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) - \mathfrak{s}_q[\varepsilon](t)| \leq |r - q|.$$

Für $\varepsilon \equiv 0$ ist $\mathfrak{s}_r[\varepsilon] \equiv 0$. Aus Abschätzung (2.13) und Bemerkung 2.2.8 folgt damit für jedes $\varepsilon \in C([0, T])$

$$\max_{0 \leq t \leq T} |\mathfrak{s}_r[\varepsilon](t)| \leq 2 \max_{0 \leq t \leq T} |\varepsilon(t)| \quad \text{für alle } r > 0.$$

Da jede stetige Funktion ε auf dem Kompaktum $[0, T]$ beschränkt bleibt, sind die Funktionen γ_t , $t \in [0, T]$, gleichmäßig beschränkt. Es gilt also

$$\max_{r > 0} |\gamma_t(r)| \leq 2 \max_{0 \leq t \leq T} |\varepsilon(t)| \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

□

Definition 2.3.3 Sei $\nu : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend und beschränkt. Dann definieren wir den **Prandtl-Ishlinskii-Operator** mit gedächtnisfreiem Anfangswert \mathcal{P} , $\mathcal{P} : C([0, T]) \rightarrow Abb(0, T)$, durch das uneigentliche Riemann-Stieltjes-Integral

$$\mathcal{P}[\varepsilon](t) := \int_0^\infty \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) d\nu(r) := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) d\nu(r) \quad \text{für alle } \varepsilon \in C([0, T]). \quad (2.18)$$

ν nennen wir **Verteilungsfunktion**.

Bemerkung 2.3.4 Es ist $\nu \in BV(0, \infty)$. Die Gedächtnisfunktion γ_t , $\gamma_t(r) = \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t)$, ist nach Lemma 2.3.2 für jedes $\varepsilon \in C([0, T])$ und $t \in [0, T]$ stetig und beschränkt. Also existiert das Riemann-Stieltjes-Integral von γ_t über jedes kompakte Intervall $[0, c]$, $c > 0$, bezüglich ν . Sei $f(s) := \int_0^s \gamma_t(r) d\nu(r)$. Aus der Monotonie und Beschränktheit von ν sowie der Beschränktheit von γ_t folgt, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante C existieren muß, so daß $|f(R) - f(Q)| \leq \varepsilon$ für beliebige $R > Q \geq C$ ist. Das Cauchy-Kriterium sichert die Existenz des obigen, uneigentlichen Riemann-Stieltjes-Integrals (vgl. [W91, 6.12.b]). Ferner gilt für jedes $t \in [0, T]$

$$|\mathcal{P}[\varepsilon](t)| \leq \max_{r > 0} |\gamma_t(r)| \|\nu\|_{BV(0, \infty)}.$$

Bemerkung 2.3.5 Nach Definition 2.3.3 ist jeder Prandtl-Ishlinskii-Operator eine gewichtete Überlagerung von Stop-Operatoren mit gedächtnisfreien Anfangswerten. Da die Stop-Operatoren \mathfrak{s}_r , $r > 0$, ratenunabhängige Volterra-Operatoren sind, gilt dies auch für die Prandtl-Ishlinskii-Operatoren. In Lemma 2.3.11 werden wir sehen, daß jeder Prandtl-Ishlinskii-Operator den Banachraum $(C([0, T]), \|\cdot\|_\infty)$ in sich abbildet. Setzen wir $Y := \emptyset$, dann genügt jeder Prandtl-Ishlinskii-Operator der Definition 2.1.1 und ist damit ein Hysterese-Operator mit gedächtnisfreiem Anfangswert.

Bemerkung 2.3.6 Das rheologische Modell von Prandtl-Ishlinskii-Operatoren ist eine gewichtete Parallelschaltung von möglicherweise überabzählbar vielen Stop-Operatoren zu verschiedenen Fließgrenzen. Mit Hilfe dieser Operatoren lassen sich viele physikalisch relevante Hysterese-Erscheinungen beschreiben; so können innere Schleifen und Verfestigung modelliert werden, also das Verhalten von nicht perfekt-plastischen Materialien, bei denen sich die Lage der Plastizitätsgrenze in Abhängigkeit von der Materialgeschichte ändert. Die von Prandtl-Ishlinskii-Operatoren generierten Schleifen genügen den sogenannten „Madelung’schen Regeln“. Letztere sind experimentell gewonnene Aussagen über die Verzweigung von Hysterese-Schleifen und den Verlauf innerer Schleifen, die in [BS96, S. 27] näher diskutiert werden.

Bemerkung 2.3.7 Für monoton wachsende und beschränkte Funktionen $\nu : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r)$, den wir folgendermaßen bezeichnen:

$$\nu(\infty) := \lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r).$$

Wir nennen nunmehr zwei wichtige Klassen von Beispielen für Prandtl-Ishlinskii-Operatoren. Dazu definieren wir:

Definition 2.3.8 Die Funktion

$$H(r) := \begin{cases} 0, & \text{falls } r \leq 0, \\ 1, & \text{falls } r > 0, \end{cases}$$

heißt **Heaviside-Funktion**.

Beispiele 2.3.9

(i) Zu $\nu(r) := H(r - \tilde{r})$, H die Heaviside-Funktion, ist

$$\mathcal{P}[\varepsilon](t) = \int_0^\infty \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) d\nu(r) = \mathfrak{s}_{\tilde{r}}[\varepsilon](t).$$

(ii) Ist $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar, und ist $\nu(r) := \int_0^r \varphi(\rho) d\rho$, dann gilt für den Prandtl-Ishlinskii-Operator zu ν

$$\mathcal{P}[\varepsilon](t) = \int_0^\infty \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) d\nu(r) = \int_0^\infty \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) \varphi(r) dr.$$

Bemerkung 2.3.10 In [BS96, Def. 2.4.4] findet sich eine andere Definition von Prandtl-Ishlinskii-Operatoren. Dort wird das Integral in Gleichung (2.18) als Lebesgue-Integral aufgefaßt, wobei ν als ein reguläres, σ -endliches Borel-Maß auf $\mathbb{R}_{>0}$ vorausgesetzt wird. Zur Definition der Begriffe verweisen wir auf [BS96, Sect. 1.1].

Für monoton wachsende Funktionen $\nu \in W^{1,1}(0, \infty)$ läßt sich das Riemann-Stieltjes-Integral in (2.18) für jedes $\varepsilon \in C([0, T])$ und $t \in [0, T]$ mit einem Lebesgue-Integral identifizieren (vgl. [K96, Lem. V.1.25]). Es gilt dann

$$\int_0^\infty \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) d\nu(r) = \int_0^\infty \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) \nu'(r) dr.$$

Ist $\nu \in W^{1,1}(0, \infty)$ monoton wachsend, dann läßt sich die zu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, definierte Funktion

$$\mu_\nu((a, b]) := \int_a^b \nu'(r) dr = \nu(b) - \nu(a)$$

eindeutig zu einem regulären, σ -endlichen Borel-Maß auf $\mathbb{R}_{>0}$ fortsetzen und es gilt

$$\int_0^\infty \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) \nu'(r) dr = \int_0^\infty \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) d\mu_\nu.$$

Für Verteilungsfunktionen $\nu \in W^{1,1}(0, \infty)$, die monoton wachsend, und damit auch beschränkt sind, läßt sich also die von uns gewählte Definition der Prandtl-Ishlinskii-Operatoren auf die Definition 2.4.4 in [BS96] zurückführen.

In den beiden folgenden Abbildungen ist das Input-Output-Verhalten eines Prandtl-Ishlinskii-Operators skizziert:

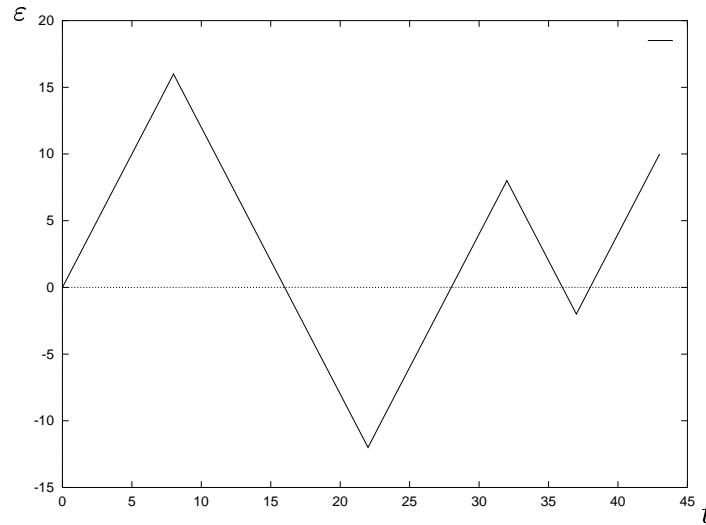


Abbildung 2.2: Input-Funktion ε

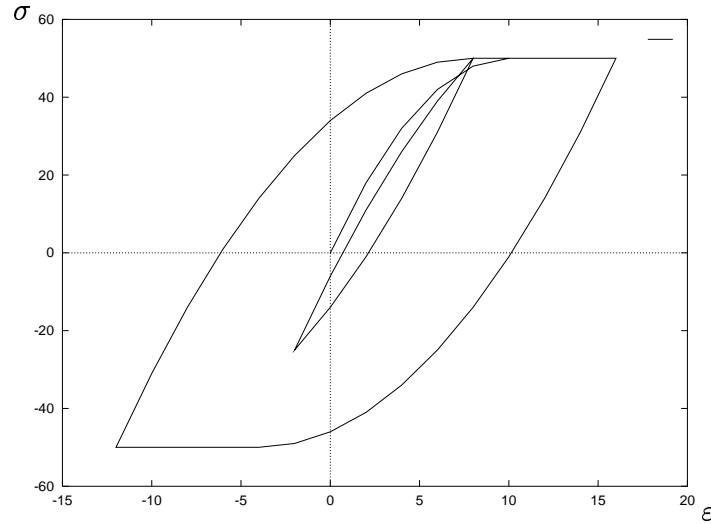
Lemma 2.3.11 *Sei \mathcal{P} der durch eine monoton wachsende und beschränkte Funktion $\nu : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definierte Prandtl-Ishlinskii-Operator.*

(i) *Dann gilt für $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in C([0, T])$ und jedes $t \in [0, T]$*

$$|\mathcal{P}[\varepsilon_1](t) - \mathcal{P}[\varepsilon_2](t)| \leq 2(\nu(\infty) - \nu(0)) \max_{0 \leq \tau \leq t} |\varepsilon_1(\tau) - \varepsilon_2(\tau)|. \quad (2.19)$$

\mathcal{P} ist also ein Lipschitz-stetiger Operator von $(C([0, T]), \|\cdot\|_\infty)$ in sich.

(ii) *Für jede Funktion $v \in C([0, t])$, $0 \leq t < T$, ist der Zweig Φ_v des Prandtl-Ishlinskii-Operators \mathcal{P} zur Vergangenheit v im Intervall $[v(t), \infty)$ konkav und im Intervall $(-\infty, v(t)]$ konvex.*

Abbildung 2.3: $\sigma = \mathcal{P}[\varepsilon]$ mit Verteilungsfunktion

$$\nu(r) = \begin{cases} r, & \text{falls } r \in [0, 10], \\ 10, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(iii) Es gilt $\mathcal{P}(W^{1,1}(0, T)) \subset W^{1,1}(0, T)$ und $\mathcal{P}[\varepsilon] \equiv 0$ für $\varepsilon \equiv 0$.

(iv) Für jedes $\varepsilon \in W^{1,1}(0, T)$ gilt für fast alle $t \in (0, T)$

$$(\mathcal{P}[\varepsilon])_t(t) \varepsilon_t(t) \geq 0,$$

d. h. \mathcal{P} ist lokal monoton.

Beweis:

zu (i):

Wegen der Monotonie und Beschränktheit von ν , der Abschätzung (2.13) und der Bemerkung 2.2.8 gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}[\varepsilon_1](t) - \mathcal{P}[\varepsilon_2](t)| &= \left| \int_0^\infty (\mathfrak{s}_r[\varepsilon_1](t) - \mathfrak{s}_r[\varepsilon_2](t)) d\nu(r) \right| \\ &\leq \int_0^\infty |\mathfrak{s}_r[\varepsilon_1](t) - \mathfrak{s}_r[\varepsilon_2](t)| d\nu(r) \\ &\leq 2 \max_{0 \leq \tau \leq t} |(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\tau)| \int_0^\infty d\nu(r) \\ &= 2((\nu(\infty) - \nu(0)) \max_{0 \leq \tau \leq t} |(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\tau)|. \end{aligned}$$

Dies liefert die Abschätzung (2.19).

Zu $t_1 \in [0, T]$ definieren wir die Funktion

$$\varepsilon_1(\tau) := \begin{cases} \varepsilon(\tau), & \text{falls } 0 \leq \tau < t_1, \\ \varepsilon(t_1), & \text{falls } t_1 \leq \tau \leq T. \end{cases}$$

Wegen der Abschätzung (2.19), und da \mathcal{P} ein ratenunabhängiger Volterra-Operator ist, gilt für $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}[\varepsilon](t_2) - \mathcal{P}[\varepsilon](t_1)| &= |\mathcal{P}[\varepsilon](t_2) - \mathcal{P}[\varepsilon_1](t_2)| \leq 2(\nu(\infty) - \nu(0)) \max_{0 \leq t \leq t_2} |(\varepsilon - \varepsilon_1)(t)| \\ &= 2(\nu(\infty) - \nu(0)) \max_{t_1 \leq t \leq t_2} |\varepsilon(t) - \varepsilon(t_1)|. \end{aligned}$$

Also ist $\sigma := \mathcal{P}[\varepsilon] \in C([0, T])$.

zu (ii):

Da in diesem Beweis die Zweige verschiedener Hysteresis-Operatoren auftauchen, bezeichnen wir den Zweig des Stop-Operators \mathfrak{s}_r zur Vergangenheit v in diesem Beweis mit $\Phi_v^{\mathfrak{s}_r}$. Sei $y \neq x$. Nach der Definition 2.1.6 gilt mit den dort definierten Funktionen v_x, v_y

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_v(y) - \Phi_v(x)}{y - x} &= \frac{\mathcal{P}[v_y](T) - \mathcal{P}[v_x](T)}{y - x} = \frac{\int_0^\infty (\mathfrak{s}_r[v_y](T) - \mathfrak{s}_r[v_x](T)) d\nu(r)}{y - x} \\ &= \int_0^\infty \frac{\Phi_v^{\mathfrak{s}_r}(y) - \Phi_v^{\mathfrak{s}_r}(x)}{y - x} d\nu(r). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Nach der Bemerkung 2.2.4 gilt für jedes $r > 0$

$$\Phi_v^{\mathfrak{s}_r}(z) = \max\{-r, \min\{\mathfrak{s}_r[v](t) + z - v(t)\}\}.$$

Der Zweig $\Phi_v^{\mathfrak{s}_r}$ des Stop-Operators \mathfrak{s}_r , $r > 0$, zur Vergangenheit v ist also im Intervall $[v(t), \infty)$ konkav und im Intervall $(-\infty, v(t)]$ konvex. Für jedes $r > 0$ gilt also nach der Definition A.0.8, falls $v(t) \leq x < y \leq z$ oder $z \leq y < x \leq v(t)$ ist,

$$\frac{\Phi_v^{\mathfrak{s}_r}(y) - \Phi_v^{\mathfrak{s}_r}(x)}{y - x} \geq \frac{\Phi_v^{\mathfrak{s}_r}(z) - \Phi_v^{\mathfrak{s}_r}(x)}{z - x}. \quad (2.21)$$

Nach Lemma 2.3.2 ist die Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(r) := \frac{\Phi_v^{\mathfrak{s}_r}(y) - \Phi_v^{\mathfrak{s}_r}(x)}{y - x} = \frac{\mathfrak{s}_r[v_y](T) - \mathfrak{s}_r[v_x](T)}{y - x}$, stetig und beschränkt.

Nach der Bemerkung 2.3.4 ist f bezüglich der monoton wachsenden und beschränkten Verteilungsfunktion ν Riemann-Stieltjes-integrierbar.

Im folgenden Teil des Beweises sei $v(t) \leq x < y \leq z$ oder $z \leq y < x \leq v(t)$. Da ν monoton wachsend ist, liefern die Definition A.0.4 des Riemann-Stieltjes-Integrals und die Ungleichung (2.21)

$$\int_0^\infty \frac{\Phi_v^{\mathfrak{s}_r}(y) - \Phi_v^{\mathfrak{s}_r}(x)}{y - x} d\nu(r) \geq \int_0^\infty \frac{\Phi_v^{\mathfrak{s}_r}(z) - \Phi_v^{\mathfrak{s}_r}(x)}{z - x} d\nu(r).$$

Daraus und aus der Gleichung (2.20) folgt

$$\frac{\Phi_v(y) - \Phi_v(x)}{y - x} \geq \frac{\Phi_v(z) - \Phi_v(x)}{z - x}.$$

Also gilt

$$\Phi_v(y) \geq \frac{y - x}{z - x} \Phi_v(z) + \left(1 - \frac{y - x}{z - x}\right) \Phi_v(x), \quad \text{falls } v(t) \leq x < y \leq z \text{ ist,}$$

und

$$\Phi_v(y) \leq \frac{y-x}{z-x} \Phi_v(z) + \left(1 - \frac{y-x}{z-x}\right) \Phi_v(x), \quad \text{falls } z \leq y < x \leq v(t) \text{ ist.}$$

Nach der Definition A.0.8 ist Φ_v also im Intervall $[v(t), \infty)$ konkav und im Intervall $(-\infty, v(t)]$ konvex.

zu (iii):

Wir nutzen, daß die Funktionen aus dem Sobolev-Raum $W^{1,1}(0, T)$ genau die absolut stetigen Funktionen sind (vgl. [Bre73, App. 2]).

Sei jetzt $\varepsilon \in W^{1,1}(0, T)$ und damit absolut stetig. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$, so daß für jede endliche Familie $\{(a_j, b_j) : j \in \{1, \dots, m\}\}$ von disjunkten Teilintervallen von $[0, T]$ mit

$$\sum_{j=1}^m (b_j - a_j) < \delta \quad \text{gilt} \quad \sum_{j=1}^m |\varepsilon(b_j) - \varepsilon(a_j)| < \epsilon.$$

Definieren wir $t_j := \max_{a_j \leq t \leq b_j} \{t : |\varepsilon(t) - \varepsilon(a_j)| = \max_{a_j \leq \tau \leq b_j} |\varepsilon(\tau) - \varepsilon(a_j)|\}$, dann ist $\sum_{j=1}^m (b_j - t_j) \leq \sum_{j=1}^m (b_j - a_j) < \delta$. Also gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m |\sigma(b_j) - \sigma(a_j)| &= \sum_{j=1}^m |\mathcal{P}[\varepsilon](b_j) - \mathcal{P}[\varepsilon](a_j)| \\ &\leq 2(\nu(\infty) - \nu(0)) \sum_{j=1}^m \max_{a_j \leq t \leq b_j} |\varepsilon(t) - \varepsilon(a_j)| \\ &= 2(\nu(\infty) - \nu(0)) \sum_{j=1}^m |\varepsilon(t_j) - \varepsilon(a_j)| < 2(\nu(\infty) - \nu(0))\epsilon. \end{aligned}$$

Also ist auch σ absolut stetig auf $[0, T]$ und damit aus $W^{1,1}(0, T)$.

Ist $\varepsilon \equiv 0$, dann ist $\mathfrak{s}_r[\varepsilon] = \sigma_r \equiv 0$ für jedes $r > 0$, da das Paar (ε, σ_r) die Bedingungen (2.4)-(2.6) mit gedächtnisfreiem Anfangswert σ_r^0 erfüllt. Also ist auch $\mathcal{P}[\varepsilon](t) = \int_0^\infty \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) d\nu(r) = 0$ für jedes $t \in [0, T]$.

zu (iv):

Die Aussage folgt sofort aus der lokalen Monotonie des Stop-Operators gemäß Abschätzung (2.10) aus Proposition 2.2.6 und der Monotonie der Verteilungsfunktion ν . \square

2.4 Der zeitdiskrete Hysterese-Operator

Definition 2.4.1 Sei V eine Menge. $S(V)$ sei definiert als die **Menge der endlichen Folgen** auf der Menge V .

$$S(V) := \{(v_0, v_1, \dots, v_N) : N \in \mathbb{N}_0, v_i \in V, 0 \leq i \leq N\}. \quad (2.22)$$

Die Anzahl der Folgenglieder einer endlichen Folge heißt **Länge** der endlichen Folge. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. $S_k(V)$ sei die Menge der endlichen Folgen mit einer Länge von mindestens $k + 1$:

$$S_k(V) := \{(v_0, v_1, \dots, v_N) \in S(V) : N \geq k\}. \quad (2.23)$$

Notation: Sind $v, w \in S(\mathbb{R})$, $v = (v_0, \dots, v_N)$, $w = (w_0, \dots, w_M)$ für $N, M \in \mathbb{N}_0$, dann bezeichnet (v, w) wieder eine endliche Folge:

$$(v, w) := (v, w_0, \dots, w_M) := (v_0, \dots, v_N, w_0, \dots, w_M).$$

Das Symbol $()$ bezeichnet die leere Folge. Ist $v = ()$ und w wie oben, dann ist

$$(v, w) := (v, w_0, \dots, w_M) := (w_0, \dots, w_M) = w.$$

Definition 2.4.2 π sei die Projektion einer endlichen Folge auf ihre letzte Komponente:

$$\pi : \begin{cases} S(V) & \rightarrow V, \\ (v_0, \dots, v_N) & \mapsto v_N. \end{cases} \quad (2.24)$$

π_k sei die Projektion einer endlichen Folge mit einer Länge von mindestens $k + 1$ auf die $(k + 1)$ -te Komponente:

$$\pi_k : \begin{cases} S_k(V) & \rightarrow V, \\ (v_0, \dots, v_N) & \mapsto v_k. \end{cases} \quad (2.25)$$

Definition 2.4.3 Sei $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_N) \in S(\mathbb{R})$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$. Für $N > 0$ sei $t_i := i \frac{T}{N}$, $0 \leq i \leq N$. Für $N > 0$ und $0 \leq i \leq N - 1$ definieren wir die Funktion $\varepsilon : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_i + \frac{N}{T}(t - t_i)(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) \quad \text{für } t \in [t_i, t_{i+1}),$$

und für $N = 0$ durch

$$\varepsilon(t) \equiv \varepsilon_0.$$

Für $N = 0$ setzen wir $t_0 := t_N := T$.

ε heißt **stetige, stückweise affine Interpolierende** von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_N)$.

Definition 2.4.4 Seien (Y, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{H} : Y \times C([0, T]) \rightarrow C([0, T])$ ein Hysterese-Operator. Zu jedem $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_N) \in S(\mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}_0$, bezeichne $\varepsilon : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ die zugehörige stetige, stückweise affine Interpolierende.

Dann ist der **diskrete Hysterese-Operator** $\tilde{\mathcal{H}}$ zu \mathcal{H} definiert durch

$$\tilde{\mathcal{H}} : \begin{cases} Y \times S(\mathbb{R}) & \rightarrow S(\mathbb{R}), \\ (y; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_N)) & \mapsto (\mathcal{H}[y; \varepsilon](t_0), \dots, \mathcal{H}[y; \varepsilon](t_N)) . \end{cases} \quad (2.26)$$

Ist \mathcal{H} ein Hysterese-Operator mit gedächtnisfreiem Anfangswert, $\mathcal{H} : C([0, T]) \rightarrow C([0, T])$, dann heißt $\tilde{\mathcal{H}}$ definiert durch

$$\tilde{\mathcal{H}} : \begin{cases} S(\mathbb{R}) & \rightarrow S(\mathbb{R}), \\ ((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_N)) & \mapsto (\mathcal{H}[\varepsilon](t_0), \dots, \mathcal{H}[\varepsilon](t_N)) , \end{cases}$$

diskreter Hysterese-Operator mit gedächtnisfreiem Anfangswert.

Die Abbildung

$$\tilde{\mathcal{H}}_f := \pi \circ \tilde{\mathcal{H}} : \begin{cases} Y \times S(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R}, \\ (y; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_N)) & \mapsto \mathcal{H}[y; \varepsilon](T) , \end{cases} \quad (2.27)$$

die einem Parameterwert und einer endlichen Folge den Output-Wert, der durch den diskreten Hysterese-Operator zum Endzeitpunkt $T = t_N$ erzeugt wird, zuordnet, heißt **Endauswertung des diskreten Hysterese-Operators**.

Entsprechend definieren wir für diskrete Hysterese-Operatoren $\tilde{\mathcal{H}}$ mit gedächtnisfreiem Anfangswert die **Endauswertung des diskreten Hysterese-Operators mit gedächtnisfreiem Anfangswert** als die Abbildung

$$\tilde{\mathcal{H}}_f := \pi \circ \tilde{\mathcal{H}} : \begin{cases} S(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R}, \\ ((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_N)) & \mapsto \mathcal{H}[\varepsilon](T) . \end{cases}$$

Bemerkung 2.4.5 (i) Die Bezeichnung $\tilde{\mathcal{H}}_f$ wurde in Anlehnung an die Notation in [BS96] für „final value mapping“ gewählt.

(ii) Entsprechend der Definition 2.4.4 bezeichnet $\tilde{\mathfrak{s}}_r$ den diskreten Stop-Operator und $\tilde{\mathcal{P}}$ den diskreten Prandtl-Ishlinskii-Operator.

Definition 2.4.6 Seien $\varepsilon \in S(\mathbb{R}) \cup \emptyset$ und $y \in Y$. Dann heißt die Funktion $\tilde{\Phi}_{\varepsilon, y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tilde{\Phi}_{\varepsilon, y}(x) := \tilde{\mathcal{H}}_f(y; (\varepsilon, x)) \quad (2.28)$$

Zweig des diskreten Hysterese-Operators $\tilde{\mathcal{H}}$ zur diskreten Vergangenheit ε und zum Anfangswert y . Für diskrete Hysterese-Operatoren mit gedächtnisfreiem Anfangswert definieren wir entsprechend für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\tilde{\Phi}_{\varepsilon}(x) := \tilde{\mathcal{H}}_f((\varepsilon, x)) . \quad (2.29)$$

Lemma 2.4.7 *Sei $\tilde{\mathcal{H}}$ ein diskreter Hysterese-Operator. Dann ist $\tilde{\mathcal{H}}$ ein diskreter Volterra-Operator, d. h. für alle $(u_0, \dots, u_N), (v_0, \dots, v_N) \in S(\mathbb{R})$ und $y \in Y$ gilt*

$$u_i = v_i \quad \text{für alle } i \in \{0, \dots, k\} \quad \text{für ein } k \leq N \\ \Rightarrow \pi_k \circ \tilde{\mathcal{H}}(y; (u_0, \dots, u_N)) = \pi_k \circ \tilde{\mathcal{H}}(y; (v_0, \dots, v_N)). \quad (2.30)$$

Beweis:

1. Fall: Für $N = 0$ ist nichts zu zeigen.

2. Fall: Seien $N > 0$, $u_i = v_i$ für alle $i \in \{0, \dots, k\}$ für ein $k \leq N$, $t_k := k \frac{T}{N}$ und u bzw. v die stetigen, stückweise affinen Interpolierenden von (u_0, \dots, u_N) bzw. (v_0, \dots, v_N) . Es gilt also

$$u|_{[0, t_k]} = v|_{[0, t_k]}.$$

Sei \mathcal{H} der zugehörige Hysterese-Operator. Da \mathcal{H} nach Definition ein Volterra-Operator ist, gilt für jedes $y \in Y$

$$\mathcal{H}[y; u](t_k) = \mathcal{H}[y; v](t_k),$$

und damit

$$\pi_k \circ \tilde{\mathcal{H}}(y; (u_0, \dots, u_N)) = \mathcal{H}[y; u](t_k) = \mathcal{H}[y; v](t_k) = \pi_k \circ \tilde{\mathcal{H}}(y; (v_0, \dots, v_N)).$$

Dies liefert die Aussage des Lemmas. □

Bei einer konkreten numerischen Rechnung ist es wichtig die Komplexität des Gedächtnisses zu reduzieren. Im allgemeinen Fall, für jeden ratenunabhängigen Operator, haben wir die folgende Möglichkeit.

Lemma 2.4.8 *Sei $\tilde{\mathcal{H}}$ der diskrete Hysterese-Operator zum Hysterese-Operator \mathcal{H} .*

(i) *Sei $k \geq 0$. Dann gilt*

$$\pi \circ \tilde{\mathcal{H}}(y; (u_0, \dots, u_k, u_k)) = \pi \circ \tilde{\mathcal{H}}(y; (u_0, \dots, u_k)).$$

(ii) *Sei $k \geq 2$. Für $u_{k-2} \leq u_{k-1} \leq u_k$ oder $u_{k-2} \geq u_{k-1} \geq u_k$ gilt*

$$\pi \circ \tilde{\mathcal{H}}(y; (u_0, \dots, u_k)) = \pi \circ \tilde{\mathcal{H}}(y; (u_0, \dots, u_{k-2}, u_k)).$$

Die Abbildung

$$R_1 : \begin{cases} S(\mathbb{R}) & \rightarrow S(\mathbb{R}), \\ (u_0, \dots, u_k) & \mapsto \begin{cases} (u_0, \dots, u_{k-2}, u_k), & \text{falls } k \geq 2 \text{ und } (u_{k-2} \leq u_{k-1} \leq u_k \\ & \text{oder } u_{k-2} \geq u_{k-1} \geq u_k), \\ (u_0, \dots, u_{k-1}), & \text{falls } k \geq 1 \text{ und } u_{k-1} = u_k, \\ (u_0, \dots, u_k), & \text{sonst,} \end{cases} \end{cases}$$

heißt Monotonie-Reduktion.

Beweis:

Beide Aussagen folgen aus der Ratenunabhängigkeit von Hysterese-Operatoren für geeignet gewählte Zeittransformationen α .

zu (i):

Sei u die stetige, stückweise affine Interpolierende von (u_0, \dots, u_k) .

Sei \tilde{u} die stetige, stückweise affine Interpolierende von (u_0, \dots, u_k, u_k) .

Seien $t_i := i\frac{T}{k}$ für $0 \leq i \leq k$ und $\tau_i := i\frac{T}{k+1}$ für $0 \leq i \leq k+1$. Sei $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T]$ definiert durch

$$\begin{aligned}\alpha(\tau) &= t_i + \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i}(t_{i+1} - t_i) \quad \text{für } \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = 0, \dots, k-1, \\ \alpha(\tau) &= t_k = T \quad \text{für } \tau \in [\tau_k, T].\end{aligned}$$

α ist damit eine stetige, surjektive und nicht fallende Funktion.

Für jedes $i \in \{0, \dots, k+1\}$ gilt

$$\tilde{u}(\tau_i) = (u \circ \alpha)(\tau_i).$$

Für jedes $i \in \{0, \dots, k\}$ ist $u \circ \alpha|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ affin, da es sich um eine Hintereinanderausführung von affinen Funktionen handelt. Da auch $\tilde{u}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ für $i = 0, \dots, k$ affin ist und an den Stützstellen τ_i , $i = 0, \dots, k+1$, mit $u \circ \alpha$ übereinstimmt, muß gelten

$$\tilde{u} = u \circ \alpha.$$

Sei \mathcal{H} der zugehörige Hysterese-Operator. Wegen der Ratenunabhängigkeit von \mathcal{H} gilt

$$\begin{aligned}\pi \circ \tilde{\mathcal{H}}(y; (u_0, \dots, u_k, u_k)) &= \mathcal{H}[y; \tilde{u}](T) = \mathcal{H}[y; u \circ \alpha](T) = \mathcal{H}[y; u](\alpha(T)) \\ &= \mathcal{H}[y; u](T) = \pi \circ \tilde{\mathcal{H}}(y; (u_0, \dots, u_k)).\end{aligned}$$

zu (ii):

1. Fall: Sei $u_{k-2} = u_{k-1}$ oder $u_{k-1} = u_k$. Dann liefert Lemma 2.4.8 (i) in Verbindung mit Lemma 2.4.7 die Aussage von (ii).

2. Fall: Seien $u_{k-2} < u_{k-1} < u_k$ oder $u_{k-2} > u_{k-1} > u_k$ und v die stetige, stückweise affine Interpolierende von $(u_0, \dots, u_{k-2}, u_k)$ sowie u die stetige, stückweise affine Interpolierende von (u_0, \dots, u_k) , $t_i = i\frac{T}{k-1}$, $i = 0, \dots, k-1$ und $\tau_i := i\frac{T}{k}$, $i = 0, \dots, k$.

Sei $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T]$ definiert durch

$$\begin{aligned}\alpha(\tau) &= t_i + \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i}(t_{i+1} - t_i) \quad \text{für } \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = 0, \dots, k-3, \\ \alpha(\tau) &= t_{k-2} + \frac{\tau - \tau_{k-2}}{\tau_{k-1} - \tau_{k-2}}(\tilde{t} - t_{k-2}) \quad \text{für } \tau \in [\tau_{k-2}, \tau_{k-1}), \\ \alpha(\tau) &= \tilde{t} + \frac{\tau - \tau_{k-1}}{T - \tau_{k-1}}(T - \tilde{t}) \quad \text{für } \tau \in [\tau_{k-1}, T],\end{aligned}$$

wobei $\tilde{t} \in [t_{k-2}, T]$ durch

$$\tilde{t} := t_{k-2} + \frac{u_{k-1} - u_{k-2}}{u_k - u_{k-2}}(T - t_{k-2})$$

definiert sei. α ist damit eine stetige, surjektive und nicht fallende Funktion. Es gilt

$$\begin{aligned} u(\tau_i) &= u_i = v(t_i) = (v \circ \alpha)(\tau_i), \quad i = 0, \dots, k-2, \\ u(\tau_{k-1}) &= u_{k-1} = u_{k-2} + \frac{u_{k-1} - u_{k-2}}{u_k - u_{k-2}}(u_k - u_{k-2}) \\ &\stackrel{\text{Def. } \tilde{t}}{=} v(t_{k-2}) + \frac{\tilde{t} - t_{k-2}}{T - t_{k-2}}(v(T) - v(t_{k-2})) \stackrel{v|_{[t_{k-2}, T]} \text{ affin}}{=} v(\tilde{t}) = (v \circ \alpha)(\tau_{k-1}), \\ u(T) &= u_k = v(T) = (v \circ \alpha)(T). \end{aligned}$$

Wie im Beweis von (i) folgt

$$u = v \circ \alpha.$$

Wegen der Ratenunabhängigkeit des zugehörigen Hysterese-Operators \mathcal{H} gilt

$$\begin{aligned} \pi \circ \tilde{\mathcal{H}}(y; (u_0, \dots, u_k)) &= \mathcal{H}[y; u](T) = \mathcal{H}[y; v \circ \alpha](T) = \mathcal{H}[y; v](\alpha(T)) \\ &= \mathcal{H}[y; v](T) = \pi \circ \tilde{\mathcal{H}}(y; (u_0, \dots, u_{k-2}, u_k)). \end{aligned}$$

□

2.5 Die Auswertung des Prandtl-Ishlinskii-Operators

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie die Auswertung des diskreten Prandtl-Ishlinskii-Operators zu einer gegebenen Verteilungsfunktion ν bezüglich der endlichen Input-Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ erfolgt. Dazu wird zunächst eine diskrete Version von Definition 2.3.1 eingeführt.

Definition 2.5.1 Zu $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in S(\mathbb{R})$ definieren wir die **diskrete Gedächtnisfunktion** $\tilde{\gamma}_k$ durch

$$\tilde{\gamma}_k : \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ r & \mapsto \tilde{\mathfrak{s}}_{r,f}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)). \end{cases}$$

Bemerkung 2.5.2 Wir sagen auch, daß $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ die Gedächtnisfunktion $\tilde{\gamma}_k$ erzeugt. Ist ε die stetige, stückweise affine Interpolierende von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ nach Definition 2.4.3, dann ist $\mathfrak{s}_r[\varepsilon](T) = \tilde{\mathfrak{s}}_{r,f}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k))$ für jedes $r > 0$. Also ist die in Definition 2.3.1 eingeführte Gedächtnisfunktion $\gamma_T = \tilde{\gamma}_k$.

Zur Auswertung des diskreten Prandtl-Ishlinskii-Operators bezüglich einer gegebenen endlichen Input-Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ bestimmen wir im Abschnitt 2.5.1 die diskrete Gedächtnisfunktion $\tilde{\gamma}_k$ beziehungsweise die dort definierte Folge der wesentlichen Extrema von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$, die $\tilde{\gamma}_k$ eindeutig festlegt. Im Abschnitt 2.5.2 wird gezeigt, wie die Verteilungsfunktion ν aus gemessenen Materialdaten bestimmt werden kann, falls der

Prandtl-Ishlinskii-Operator zur Beschreibung von Materialverhalten in der Elastoplastizität verwendet werden soll. Das Bild der Input-Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ bezüglich des Prandtl-Ishlinskii-Operators läßt sich dann mit Hilfe der Materialdaten und der Folge der wesentlichen Extrema zu $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ bestimmen. Im Abschnitt 2.5.3 werden verschiedene Ansätze vorgestellt, wie sich die Berechnung des Bildes durch eine Approximation der Verteilungsfunktion realisieren läßt. Im Abschnitt 2.6 werden obere Schranken für die dabei entstehenden Fehler hergeleitet.

2.5.1 Berechnung der Gedächtnisfunktion

Nach der Definition der diskreten Gedächtnisfunktion $\tilde{\gamma}_k$ müssen zu ihrer Berechnung die Bilder der Input-Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ bezüglich der Endauswertungen der diskreten Stop-Operatoren $\tilde{s}_{r,f}$, $r > 0$, bestimmt werden. Nach der Definition der Stop-Operatoren in Satz 2.2.1 sind dazu unendlich viele Variationsungleichungen zu lösen. Die Eigenschaften der Familie der Stop-Operatoren erlauben aber einen anderen Zugang, der es möglich macht, die diskrete Gedächtnisfunktion ohne Rückgriff auf die Variationsungleichungen zu bestimmen. Wir haben bereits im letzten Abschnitt in Lemma 2.4.8 gesehen, daß die endliche Input-Folge $\varepsilon := (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ und die durch Anwendung der Monotonie-Reduktion auf ε erhaltene endliche Folge $R_1(\varepsilon)$ bezüglich der Endauswertung eines diskreten Hysterese-Operators dasselbe Bild liefern. In diesem Abschnitt werden wir weitere Reduktionen, die für die Familie der diskreten Stop-Operatoren gelten, kennenlernen. Der Ansatz, die Input-Folge durch Anwendung von Reduktionsregeln so weit wie möglich zu verkürzen, wobei das Bild bezüglich der Endauswertung eines Hysterese-Operators erhalten bleibt, findet sich bereits in [BS96, Sect. 2.6 und 2.7]. In Lemma 2.5.4 wird sich herausstellen, daß die diskreten Stop-Operatoren, und damit auch die Prandtl-Ishlinskii-Operatoren, innere Schleifen vergessen, wie es die in [BS96, S. 27] näher erläuterten „Madelung’schen Regeln“ postulieren. In Lemma 2.5.5 werden wir zeigen, daß Anfangswerte von betragsgrößeren Werten überschrieben werden. Daher ist zur Bestimmung der diskreten Gedächtnisfunktion $\tilde{\gamma}_k$ zur endlichen Folge $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ nur eine Teilfolge der Folge ε , die Folge der wesentlichen Extrema von ε , die wir in Definition 2.5.6 einführen werden, notwendig. In Proposition 2.5.12 wird die diskrete Gedächtnisfunktion in Abhängigkeit von der Folge der wesentlichen Extrema von ε explizit angegeben. In Bemerkung 2.5.13 werden wir eine diskretisierte Gedächtnisfunktion einführen, welche sich einfacher berechnen läßt als die oben eingeführte diskrete Gedächtnisfunktion.

Im folgenden bezeichnen π , π_p die Projektions-Operatoren aus der Definition 2.4.2. In diesem Abschnitt bezeichnet k eine Zahl aus \mathbb{N}_0 und n eine natürliche Zahl.

Da die Stop-Operatoren über ein lokales Gedächtnis verfügen, ist der Zweig des Stop-Operators zur Vergangenheit v , $v : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$, für ein $t > 0$, und zum Anfangswert σ_r^0 allein durch $(v(t), \mathfrak{s}_r[\sigma_r^0; v](t))$ festgelegt. Die diskreten Stop-Operatoren werden mit Hilfe der stetigen, stückweise affinen Interpolierenden einer endlichen Input-Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ auf die (kontinuierlichen) Stop-Operatoren zurückgeführt. Deshalb kann $\pi \circ \tilde{s}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k))$ durch sukzessive Bestimmung und Auswertung der Zweige des Stop-Operators, die durch $(\varepsilon_p, \pi_p \circ \mathfrak{s}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)))$, $p \in \{0, \dots, k-1\}$, festgelegt sind, berechnet werden. Dies motiviert das folgende Lemma.

Lemma 2.5.3 (Halbgruppeneigenschaft des diskreten Stop-Operators) *Zu $r > 0$, $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in S(\mathbb{R})$ und $\sigma_r^0 \in [-r, r]$ definieren wir für jedes $p \in \{1, \dots, k\}$*

$$\sigma_r^p := \pi_p \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)).$$

Dann gilt für jedes $p \in \{0, \dots, k\}$

$$(i) \quad \sigma_r^p = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p)).$$

$$(ii) \quad \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^p; (\varepsilon_p, \dots, \varepsilon_k)).$$

(iii) Insbesondere gilt für jedes $p \in \{0, \dots, k-1\}$

$$\sigma_r^{p+1} = \min\{r, \max\{-r, \sigma_r^p + \varepsilon_{p+1} - \varepsilon_p\}\} = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^p; (\varepsilon_p, \varepsilon_{p+1})).$$

Beweis:

zu (i):

Für $k = 0$ ist die Aussage offensichtlich. Sei also $k > 0$. Für $p \in \{0, \dots, k\}$ sei $\hat{\varepsilon} := (\hat{\varepsilon}_0, \dots, \hat{\varepsilon}_k) := (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p, \dots, \varepsilon_p)$ eine endliche Folge der Länge $k+1$, wobei gelte

$$\hat{\varepsilon}_q = \begin{cases} \varepsilon_q, & \text{falls } q \in \{0, \dots, p-1\}, \\ \varepsilon_p, & \text{falls } q \in \{p, \dots, k\}. \end{cases}$$

Sei ε die stetige, stückweise affine Interpolierende von $\hat{\varepsilon}$ mit

$$\varepsilon(t_i) = \begin{cases} \varepsilon_i, & \text{falls } i \in \{0, \dots, p-1\}, \\ \varepsilon_p, & \text{falls } i \in \{p, \dots, k\}, \end{cases} \quad t_i = i \frac{T}{k}, \quad i \in \{0, \dots, k\},$$

wobei ε in jedem Intervall $[t_i, t_{i+1}]$, $i \in \{0, \dots, k-1\}$, affin ist.

Aus Lemma 2.4.7 und der Definition 2.4.4 der diskreten Hysterese-Operatoren ergibt sich

$$\pi_p \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \pi_p \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; \hat{\varepsilon}) = \mathfrak{s}_r[\sigma_r^0; \varepsilon](t_p).$$

Da $\varepsilon(t) \equiv \varepsilon_p$ im Intervall $[t_p, T]$ ist, folgt aus der Bemerkung 2.2.4

$$\mathfrak{s}_r[\sigma_r^0; \varepsilon](t_p) = \mathfrak{s}_r[\sigma_r^0; \varepsilon](T).$$

Wegen Lemma 2.4.8 (i) und der Definition 2.4.4 der diskreten Hysterese-Operatoren gilt

$$\mathfrak{s}_r[\sigma_r^0; \varepsilon](T) = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; \hat{\varepsilon}) = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p)).$$

Insgesamt folgt

$$\pi_p \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p)).$$

zu (iii):

Sei ε jetzt die stetige, stückweise affine Interpolierende von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$. Sei $\hat{\varepsilon}$ die stetige, stückweise affine Interpolierende von $(\varepsilon_p, \varepsilon_{p+1})$, $p \in \{0, \dots, k-1\}$.

Nach der Definition der diskreten Hysterese-Operatoren in Definition 2.4.4 mit Hilfe von stückweise monotonen Interpolierenden und dem in Bemerkung 2.2.4 gegebenen analytischen Ausdruck für den Zweig des Stop-Operators gilt

$$\begin{aligned}\sigma_r^{p+1} &= \pi_{p+1} \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \mathfrak{s}_r[\sigma_r^0; \varepsilon](t_{p+1}) \\ &= \max\{-r, \min\{r, \sigma_r^p + \varepsilon_{p+1} - \varepsilon_p\}\} \\ &= \mathfrak{s}_r[\sigma_r^p; \hat{\varepsilon}](T) = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^p; (\varepsilon_p, \varepsilon_{p+1})) .\end{aligned}$$

zu (ii):

Sei ε wieder die stetige, stückweise affine Interpolierende aus dem Beweis von Teil (iii). Sei $\varepsilon^{p,q}$ die stetige, stückweise affine Interpolierende von $(\varepsilon_p, \dots, \varepsilon_q)$. Die Werte $\sigma_r^q = \pi_q \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \mathfrak{s}_r[\sigma_r^0; \varepsilon](t_q)$, $1 \leq q \leq k$, lassen sich nach dem bereits bewiesenen Teil (iii) dieses Lemmas beginnend mit $q = 1$ sukzessive berechnen durch

$$\sigma_r^q = \max\{-r, \min\{r, \sigma_r^{q-1} + \varepsilon_q - \varepsilon_{q-1}\}\} . \quad (2.31)$$

Entsprechend dem Beweis von Teil (iii) gilt für $0 \leq p \leq q \leq k$

$$\begin{aligned}\pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^p; (\varepsilon_p, \dots, \varepsilon_q)) &= \mathfrak{s}_r[\sigma_r^p; \varepsilon^{p,q}](T) = \max\{-r, \min\{r, \sigma_r^{q-1} + \varepsilon_q - \varepsilon_{q-1}\}\} \\ &= \sigma_r^q = \pi_q \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) ,\end{aligned}$$

wobei σ_r^{q-1} sich aus σ_r^p und $(\varepsilon_p, \dots, \varepsilon_q)$ durch sukzessive Anwendung von (2.31) berechnet. Für $q = k$ folgt die Aussage von (ii). \square

Lemma 2.5.4

(i) Für $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_3) \in S(\mathbb{R})$ seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [\min\{\varepsilon_0, \varepsilon_3\}, \max\{\varepsilon_0, \varepsilon_3\}]$, dann gilt für jedes $r > 0$ und $\sigma_r^0 \in [-r, r]$

$$\pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)) = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \varepsilon_3)) .$$

(ii) Für $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in S(\mathbb{R})$, $k \geq 3$, seien $\varepsilon_{k-2}, \varepsilon_{k-1} \in [\min\{\varepsilon_{k-3}, \varepsilon_k\}, \max\{\varepsilon_{k-3}, \varepsilon_k\}]$, dann gilt für jedes $r > 0$ und $\sigma_r^0 \in [-r, r]$

$$\pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{k-3}, \varepsilon_k)) .$$

Die Abbildung

$$R_2 : \begin{cases} S(\mathbb{R}) & \rightarrow S(\mathbb{R}), \\ (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) & \mapsto \begin{cases} (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{k-3}, \varepsilon_k), & \text{falls } k \geq 3 \text{ und } \varepsilon_{k-2}, \varepsilon_{k-1} \in \\ & [\min\{\varepsilon_{k-3}, \varepsilon_k\}, \max\{\varepsilon_{k-3}, \varepsilon_k\}], \\ (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k), & \text{sonst,} \end{cases} \end{cases}$$

heißt **Madelung-Reduktion**.

Beweis:

zu (i):

1. Fall: Falls $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_3$ oder $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ ist, folgt die Aussage aus der diskreten Ratenunabhängigkeit nach Lemma 2.4.8.

2. Fall: Sei $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_3$.

Wegen der Lemmata 2.5.3 und 2.4.7 lassen sich die Endauswertungen der diskreten Stop-Operatoren folgendermaßen charakterisieren:

$$\begin{aligned}\sigma_r^1 &= \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \varepsilon_1)) = \min\{r, \sigma_r^0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_0\}, \\ \sigma_r^2 &= \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)) = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^1; (\varepsilon_1, \varepsilon_2)) = \max\{-r, \sigma_r^1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\}.\end{aligned}$$

Einerseits gilt

$$\begin{aligned}\pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)) &= \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^2; (\varepsilon_2, \varepsilon_3)) = \min\{r, \sigma_r^2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2\} \\ &\geq \min\{r, \sigma_r^1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1\} \\ &= \min\{r, \min\{r, \sigma_r^0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_0\} + \varepsilon_3 - \varepsilon_1\} \\ &= \min\{r, \sigma_r^0 + \varepsilon_3 - \varepsilon_0\} = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \varepsilon_3)).\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\sigma_r^1 &\leq \sigma_r^0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_0, \\ \sigma_r^2 &= \max\{-r, \sigma_r^1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\} \leq \max\{-r, \sigma_r^0 + \varepsilon_2 - \varepsilon_0\} = \sigma_r^0 + \varepsilon_2 - \varepsilon_0, \\ \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)) &= \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^2; (\varepsilon_2, \varepsilon_3)) = \min\{r, \sigma_r^2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2\} \\ &\leq \min\{r, \sigma_r^0 + \varepsilon_3 - \varepsilon_0\} = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \varepsilon_3)).\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)) = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \varepsilon_3)).$$

3. Fall: Sei $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_1 \geq \varepsilon_3$.

Dies läßt sich auf den 2. Fall zurückführen, da der Stop-Operator nach Lemma 2.2.5 ungerade ist.

zu (ii):

Wegen Lemma 2.4.7 gilt

$$\sigma_r^{k-3} := \pi_{k-3} \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \pi_{k-3} \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{k-3}, \varepsilon_k, \varepsilon_k, \varepsilon_k)).$$

Daraus und aus der Halbgruppeneigenschaft des diskreten Stop-Operators nach Lemma 2.5.3, sowie Teil (i) dieses Lemmas und Lemma 2.4.8 (i) folgt

$$\begin{aligned}\pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) &\stackrel{\text{Lem. 2.5.3}}{=} \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^{k-3}; (\varepsilon_{k-3}, \dots, \varepsilon_k)) \\ &\stackrel{\text{Lem. 2.5.4(i)}}{=} \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^{k-3}; (\varepsilon_{k-3}, \varepsilon_k)) \\ &\stackrel{\text{Lem. 2.5.3}}{=} \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{k-3}, \varepsilon_k, \varepsilon_k, \varepsilon_k)) \\ &\stackrel{\text{Lem. 2.4.8(i)}}{=} \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r(\sigma_r^0; (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{k-3}, \varepsilon_k)).\end{aligned}$$

□

Lemma 2.5.5 Für $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in S(\mathbb{R})$ sei $|\varepsilon_k| = \max_{0 \leq j \leq k} |\varepsilon_j|$. Dann gilt für jedes $r > 0$

$$\pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_k)).$$

Die von (ε_k) erzeugte Gedächtnisfunktion $\tilde{\gamma}_k$ hat die Form

$$\tilde{\gamma}_k(r) = \begin{cases} \text{sign}(\varepsilon_k)r, & \text{falls } r < |\varepsilon_k|, \\ \varepsilon_k, & \text{falls } r \geq |\varepsilon_k|. \end{cases}$$

Die Abbildung

$$R_3 : \begin{cases} S(\mathbb{R}) & \rightarrow S(\mathbb{R}), \\ (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) & \mapsto \begin{cases} (\varepsilon_k), & \text{falls } |\varepsilon_k| \geq \max_{0 \leq j \leq k} |\varepsilon_j|, \\ (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k), & \text{sonst,} \end{cases} \end{cases}$$

heißt **Initial-Reduktion**.

Beweis:

Nach Lemma 2.5.3 gilt für $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) \\ = \begin{cases} \min\{r, \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{k-1})) + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}\}, & \text{falls } \varepsilon_k \geq \varepsilon_{k-1}, \\ \max\{-r, \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{k-1})) + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}\}, & \text{falls } \varepsilon_k < \varepsilon_{k-1}, \end{cases} \end{aligned}$$

und $\tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_0)) = \text{sign}(\varepsilon_0) \min\{r, |\varepsilon_0|\}$ nach der Definition des Stop-Operators mit gedächtnisfreiem Anfangswert.

Für $r \geq |\varepsilon_k| \geq |\varepsilon_0|$ gilt

$$\pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_0)) = \varepsilon_0.$$

Ist $\pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{j-1})) = \varepsilon_{j-1}$ für ein $j \in \{1, \dots, k\}$, dann folgt für jedes $r \geq |\varepsilon_k| \geq |\varepsilon_j|$

$$\pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_j)) = \begin{cases} \min\{r, \varepsilon_j\} = \varepsilon_j, & \text{falls } \varepsilon_j \geq \varepsilon_{j-1}, \\ \max\{-r, \varepsilon_j\} = \varepsilon_j, & \text{falls } \varepsilon_j < \varepsilon_{j-1}. \end{cases}$$

Induktiv folgt für alle $j \leq k$ und $r \geq |\varepsilon_k|$

$$\pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_j)) = \varepsilon_j = \text{sign}(\varepsilon_j) \min\{r, |\varepsilon_j|\} = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_j)).$$

Insbesondere gilt also für die Gedächtnisfunktion $\tilde{\gamma}_k(r) = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \varepsilon_k$ für $r \geq |\varepsilon_k|$.

Für $r < |\varepsilon_k| =: \bar{r}$ gilt wegen der Lipschitz-Stetigkeit der Gedächtnisfunktion nach Abschätzung (2.15)

$$\begin{aligned} |r - \bar{r}| &\geq |\pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) - \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_{\bar{r}}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k))| \\ &\geq |\pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) - \varepsilon_k| - |\varepsilon_k - \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_{\bar{r}}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k))| \\ &\geq |\pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k))| - |\varepsilon_k| \geq |r - \bar{r}|. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$|\pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) - \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_{\bar{r}}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k))| = |\pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) - \varepsilon_k| = |r - \bar{r}|.$$

Da $|\pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k))| \leq r$ ist, folgt daraus

$$\tilde{\gamma}_k(r) = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \text{sign}(\varepsilon_k)r = \text{sign}(\varepsilon_k) \min\{r, |\varepsilon_k|\} = \pi \circ \tilde{\mathfrak{s}}_r((\varepsilon_k)).$$

□

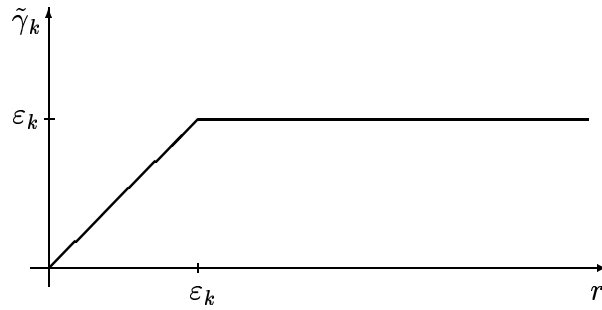


Abbildung 2.4: Gedächtnisfunktion $\tilde{\gamma}_k$ zur reduzierten Input-Folge (ε_k)

Der folgende Algorithmus bestimmt sukzessive zu jeder endlichen Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p) \in S(\mathbb{R})$, $0 \leq p \leq k$, eine durch Anwendung einer Komposition von Monotonie-, Madelung- und Initial-Reduktionen reduzierte Folge, aus der Folge $v = (w^{p-1}, \varepsilon_p)$, die sich für $p \geq 1$ aus der reduzierten Folge w^{p-1} der Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{p-1})$ bzw. für $p = 0$ aus der leeren Folge $w^{-1} := ()$ und dem aktuellen Input-Wert ε_p zusammensetzt, wobei ein gedächtnisfreier Anfangswert vorausgesetzt wird.

In Lemma 2.5.7 werden wir sehen, daß die Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ und die durch den Algorithmus (A) aus $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ reduzierte Folge (w_1, \dots, w_n) identische Gedächtnisfunktionen erzeugen.

Dieses schrittweise Vorgehen ist auf die spätere Anwendung der Kopplung von Prandtl-Ishlinskii-Operatoren mit einem System von partiellen Differentialgleichungen zugeschnitten. Die numerischen Lösungen des gekoppelten Systems zu den verschiedenen Zeitschichten werden dabei nacheinander bestimmt. Dazu muß der Prandtl-Ishlinskii-Operator in jedem diskreten Zeitschritt ausgewertet werden.

Zu der endlichen Folge $\varepsilon := (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in S(\mathbb{R})$, $k \geq 0$, sei $|\varepsilon| := k$ die um 1 reduzierte Länge der endlichen Folge ε . Für die leere Folge $w := ()$, setzen wir $|w| := 0$.

Zu $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir das abgeschlossene Intervall

$$\langle a, b \rangle := \begin{cases} [a, b], & \text{falls } a \leq b, \\ [b, a], & \text{falls } a > b. \end{cases}$$

Algorithmus (A) : Berechnung der reduzierten Folge zu $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$:

$w := ()$ $n := 0$ $p := 0$ <i>if</i> $p \leq k$ <i>if</i> $w = ()$ $\tilde{w} := ()$ <i>else</i> $\tilde{w} = (w_0, \dots, w_n)$ $:= (-w_1, w_1, \dots, w_n)$ $y := \varepsilon_p$ BEGIN $n := \tilde{w} $ <i>if</i> $n = 0$ $\tilde{w} = (w_0, w_1) := (-y, y)$ goto END <i>if</i> $w_n \in \langle w_{n-1}, y \rangle$ $\tilde{w} := (w_0, \dots, w_{n-1})$ goto BEGIN <i>if</i> $w_{n-1} \in \langle w_n, y \rangle$ <i>if</i> $n \geq 2$ $\tilde{w} := (w_0, \dots, w_{n-2})$ <i>if</i> $n = 1$ $\tilde{w} := ()$ goto BEGIN $w_{n+1} := y$ END $n := n + 1$ $w := (w_1, \dots, w_n)$ $p := p + 1$ <i>else</i> stop	Initialisierung aktuelle Zeitschicht neuer Input-Wert Monotonie-Reduktion bzw. für $n = 1$ Initial-Reduktion Madelung-Reduktion bzw. für $n = 1, 2$ Initial-Reduktion reduzierte Folge zu $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p)$
---	--

Definition 2.5.6 Die durch den Algorithmus (A) aus der endlichen Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in S(\mathbb{R})$, $k \geq 0$, reduzierte Folge (w_1, \dots, w_n) , $n \geq 1$, heißt **Folge der wesentlichen Extrema** von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$.

Lemma 2.5.7 Ist (w_1, \dots, w_n) die Folge der wesentlichen Extrema der endlichen Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in S(\mathbb{R})$, dann gilt für jedes $r > 0$

$$\pi \circ \tilde{\mathfrak{F}}_r((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \pi \circ \tilde{\mathfrak{F}}_r((w_1, \dots, w_n)).$$

Die beiden Folgen erzeugen also identische Gedächtnisfunktionen.

Beweis:

Für $p \in \{0, \dots, k\}$ bezeichnen wir mit $w^p := (w_1^p, \dots, w_{n(p)}^p)$ die durch den Algorithmus (A) bestimmte reduzierte Folge zur Folge $\varepsilon^p := (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p)$. Wir beweisen die Aussage des Lemmas induktiv.

Induktions-Anfang: Die reduzierte Folge zu (ε_0) ist $w^0 = (\varepsilon_0)$. Für $k = 0$ ist das Lemma also bewiesen.

Induktions-Voraussetzung: Sei $p \geq 1$. Es gelte

$$\sigma_r^{p-1} := \pi \circ \tilde{s}_r (\varepsilon^{p-1}) = \pi \circ \tilde{s}_r (w^{p-1})$$

und

$$\varepsilon_{p-1} = w_{n(p-1)}^{p-1}.$$

Induktions-Schluß Nach dem Algorithmus (A) ergibt sich die Folge w^p durch Anwendung einer Komposition von Monotonie-, Madelung- und Initial-Reduktionen auf die Folge (w^{p-1}, ε_p) . Nach den Lemmata 2.4.8, 2.5.4 und 2.5.5 bildet die Endauswertung des diskreten Stop-Operators \tilde{s}_r für jedes $r > 0$ die beiden Folgen auf denselben Wert ab:

$$\pi \circ \tilde{s}_r (w^p) = \pi \circ \tilde{s}_r ((w^{p-1}, \varepsilon_p)) . \quad (2.32)$$

Die Definition der Monotonie-, Madelung- und Initial-Reduktion stellt sicher, daß das letzte Folgenglied des Bildes einer Reduktion identisch mit dem letzten Folgenglied des Urbildes ist. Deshalb ist

$$w_{n(p)}^p = \varepsilon_p .$$

Wegen der Induktions-Voraussetzung und der Halbgruppeneigenschaft nach Lemma 2.5.3 folgt

$$\pi \circ \tilde{s}_r ((w^{p-1}, \varepsilon_p)) = \pi \circ \tilde{s}_r (\sigma_r^{p-1}; (w_{n(p-1)}^{p-1}, \varepsilon_p)) = \pi \circ \tilde{s}_r (\sigma_r^{p-1}; (\varepsilon_{p-1}, \varepsilon_p)) \quad (2.33)$$

und

$$\pi \circ \tilde{s}_r ((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p)) = \pi \circ \tilde{s}_r (\sigma_r^{p-1}; (\varepsilon_{p-1}, \varepsilon_p)) . \quad (2.34)$$

Insgesamt folgt aus (2.32), (2.33) und (2.34)

$$\pi \circ \tilde{s}_r ((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p)) = \pi \circ \tilde{s}_r (w^p) .$$

□

Definition 2.5.8 Eine endliche Folge $s \in S(\mathbb{R})$ heißt **wesentlich**, wenn entweder

$$s = (v) \quad \text{für ein } v \in \mathbb{R} \text{ ist}$$

oder

$$s = (v_1, \dots, v_n) \text{ für ein } n > 1 \text{ ist, und mit } v_0 := -v_1 \text{ für jedes } i \in \{1, \dots, n-1\} \text{ gilt}$$

$$v_{i+1} \in (\min\{v_{i-1}, v_i\}, \max\{v_{i-1}, v_i\}) .$$

Lemma 2.5.9 *Die durch den Algorithmus (A) zur endlichen Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ bestimmte Folge der wesentlichen Extrema ist wesentlich.*

Beweis:

Wir beweisen die Aussage induktiv.

Induktions-Anfang: Die durch den Algorithmus (A) ermittelte, reduzierte Input-Folge zur Folge (ε_0) ist $w := (\varepsilon_0)$. Sie ist wesentlich.

Induktions-Voraussetzung: Sei $p \geq 1$. Sei $w := (w_1, \dots, w_n)$, $n \geq 1$, die reduzierte Input-Folge zur Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{p-1})$. Sie sei wesentlich.

Induktions-Schluß : Die durch den Algorithmus (A) bestimmte, reduzierte Folge zur Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p)$ ist entweder

$$(\varepsilon_p)$$

und ist damit wesentlich oder sie hat die Form

$$v = (w_1, \dots, w_m, \varepsilon_p)$$

für ein $m \in \{1, \dots, n\}$. Sei wiederum $w_0 := -w_1$. Es muß gelten

$$\varepsilon_p \in (\min\{w_{m-1}, w_m\}, \max\{w_{m-1}, w_m\}) ,$$

da ansonsten

$$w_m \in < w_{m-1}, \varepsilon_p > \quad \text{oder} \quad w_{m-1} \in < w_m, \varepsilon_p >$$

ist, und damit v durch eine der Reduktionen R_1 , R_2 oder R_3 nicht auf sich abgebildet wird. Dies steht im Widerspruch dazu, daß v die durch den Algorithmus (A) bestimmte, reduzierte Folge zur Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p)$ ist.

Da $m \leq n$ ist, ist die Folge (w_1, \dots, w_m) nach Induktions-Voraussetzung wesentlich. Also ist auch v wesentlich. \square

Bemerkung 2.5.10 Das Reduktionsverfahren des Algorithmus (A) führt dazu, daß die Folge der wesentlichen Extrema von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ gerade aus einem Teil der lokalen Maxima und Minima der stetigen, stückweise affinen Interpolierenden von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ besteht. Sie sind so gewählt, daß sie in alternierender Reihenfolge auftreten, wobei die Teilfolge der lokalen Maxima streng monoton fallend und die der lokalen Minima streng monoton wachsend ist.

Lemma 2.5.11 *Zu der endlichen Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ und der zugehörigen Folge der wesentlichen Extrema (w_1, \dots, w_n) existiert eine streng monoton wachsende Funktion $J : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, k\}$, so daß (w_1, \dots, w_p) die Folge der wesentlichen Extrema von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{J(p)})$ für jedes $p \in \{1, \dots, n\}$ ist.*

Beweis:

Wir beweisen die Aussage induktiv.

Induktions-Anfang: Wir setzen $J(n) := k$.

Für $n = 1$ ist damit die Aussage des Lemmas wahr.

Induktions-Voraussetzung: Sei $1 < l \leq n$. Es existiere eine streng monoton wachsende Funktion $J : \{l, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, k\}$, so daß für jedes $m \in \{l, \dots, n\}$ gilt:

(w_1, \dots, w_m) ist die Folge der wesentlichen Extrema von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{J(m)})$.

Induktions-Schluß : Ist $R : S(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow S(\mathbb{R})$ die durch den Algorithmus (A) bestimmte Abbildung, die die reduzierte Folge $w^{p-1} := (w_1, \dots, w_q)$, für ein $q \geq 1$, zur Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{p-1})$, $p \geq 1$, und den aktuellen Input-Wert ε_p auf die reduzierte Folge w^p zur Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p)$ abbildet, dann ist

$$w^p = R((w_1, \dots, w_q), \varepsilon_p) = (\varepsilon_p), \text{ falls } |\varepsilon_p| \geq w_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, q\} \text{ ist}$$

oder

es existiert ein $s \in \{1, \dots, q\}$, so daß

$$w^p = R((w_1, \dots, w_q), \varepsilon_p) = (w_1, \dots, w_s, \varepsilon_p) \text{ ist.}$$

Es gilt also:

- $|w^p| \leq |w^{p-1}| + 1$, d. h. die Länge der Folge w^p ist höchstens um 1 größer als die Länge der Folge w^{p-1} .
- Ist w_i ein Folgenglied von w^{p-1} und kein Folgenglied von w^p , dann ist auch w_j , $i \leq j \leq q$ kein Folgenglied von w^p .

Außerdem hat die reduzierte Folge zur Folge (ε_0) die Länge 1.

Nach Induktions-Voraussetzung ist (w_1, \dots, w_l) die Folge der wesentlichen Extrema von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{J(l)})$. Wegen der genannten Eigenschaften der reduzierten Folgen muß es ein $p \in \{0, \dots, J(l) - 1\}$ geben, so daß (w_1, \dots, w_{l-1}) die Folge der wesentlichen Extrema von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p)$ ist. Die Fortsetzung der Funktion J aus der Induktions-Voraussetzung auf die Menge $\{l - 1, \dots, n\}$ durch

$$J(l - 1) = p$$

ist eine streng monoton wachsende Funktion. □

Im folgenden wird gezeigt, wie sich die diskrete Gedächtnisfunktion einer endlichen Folge aus der zugehörigen Folge der wesentlichen Extrema bestimmen läßt. Entsprechende Resultate für Gedächtnisfunktionen, die mit Hilfe der Familie der Play-Operatoren $\{\mathbf{p}_r : r > 0\}$, $\mathbf{p}_r[u] = u - \mathbf{s}_r[u]$, statt wie hier der Stop-Operatoren, definiert werden, existieren bereits. Sie finden sich in [BS96, Prop.2.7.5] und für stetige Input-Funktionen in [K96, Prop.II.2.5]. Dort werden allgemeinere Gedächtnisfunktionen betrachtet, die mit Hilfe der parameterabhängigen Play-Operatoren $\mathbf{p}_r[\sigma_r^0; \varepsilon] = u - \mathbf{s}_r[\sigma_r^0; \varepsilon]$, $\sigma_r^0 \in [-r, r]$, definiert werden.

Proposition 2.5.12 *Zu einer endlichen Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in S(\mathbb{R})$ und der zugehörigen Folge der wesentlichen Extrema (w_1, \dots, w_n) seien*

$$\begin{aligned} r_i &:= \frac{1}{2}|w_i - w_{i-1}|, \quad \text{für } i = 2, \dots, n, \\ r_1 &:= |w_1|. \end{aligned} \tag{2.35}$$

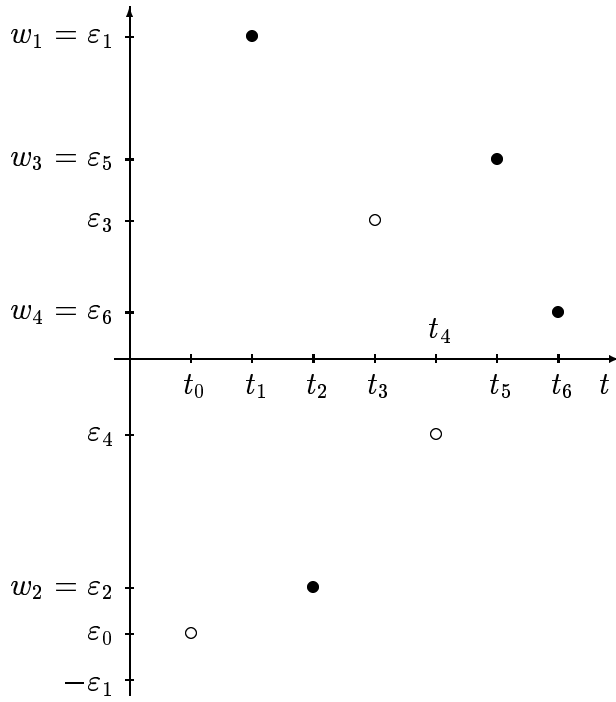


Abbildung 2.5: endliche Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_6)$ mit zugehöriger Folge der wesentlichen Extrema (w_1, \dots, w_4)

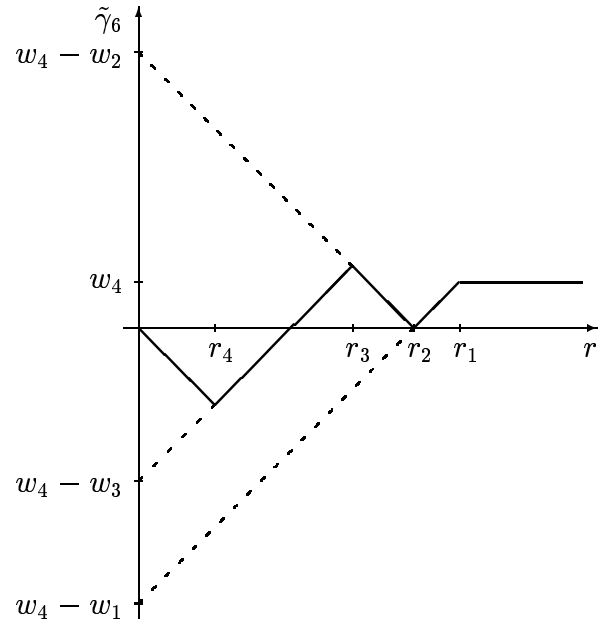


Abbildung 2.6: Gedächtnisfunktion $\tilde{\gamma}_6$ zur endlichen Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_6)$ aus Abb. 2.5

Dann liegt die Gedächtnisfunktion $\tilde{\gamma}_k$ von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ in der Menge Γ ,

$$\Gamma := \{\gamma \in W^{1,\infty}(0, \infty) : \text{es existiert } R > 0 \text{ mit } |\gamma'(r)| = 1 \text{ f.ü. in } (0, R), \gamma'(r) = 0 \text{ für } r > R\}, \quad (2.36)$$

und hat die Gestalt

$$\tilde{\gamma}_k(r) = \begin{cases} \text{sign}(w_1)(-1)^{n+1}r, & \text{falls } r \in [0, r_n), \\ w_n - w_p + \text{sign}(w_1)(-1)^{p+1}r, & \text{falls } r \in [r_{p+1}, r_p), p = 1, \dots, n-1, \\ w_n, & \text{falls } r \geq r_1, \end{cases}$$

wobei $w_n = \varepsilon_k$ ist.

Beweis:

Nach Lemma 2.5.11 existiert eine streng monoton wachsende Funktion $J : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, k\}$, so daß (w_1, \dots, w_p) die Folge der wesentlichen Extrema von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{J(p)})$ für jedes $p \in \{1, \dots, n\}$ ist.

Wegen des Lemmas 2.5.7 erzeugen $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ und (w_1, \dots, w_n) identische Gedächtnisfunktionen.

Wir beweisen die Aussage der Proposition induktiv.

Induktions-Anfang: Nach Lemma 2.5.5 gilt

$$\tilde{\gamma}_{J(1)}(r) = \begin{cases} \text{sign}(w_1)r, & \text{falls } r < r_1, \\ w_1, & \text{falls } r \geq r_1. \end{cases}$$

Ist $J(1) = k$, dann ist die Proposition bewiesen. Ist $J(1) < k$, dann setzen wir induktiv fort.

Induktions-Voraussetzung: Sei $p \geq 1$. Die Gedächtnisfunktion $\tilde{\gamma}_{J(q)}$ zu (w_1, \dots, w_q) habe für jedes $q \in \{1, \dots, p\}$ die Gestalt

$$\tilde{\gamma}_{J(q)}(r) = \begin{cases} \text{sign}(w_1)(-1)^{q+1}r, & \text{falls } r \in [0, r_q), \\ w_q - w_l + \text{sign}(w_1)(-1)^{l+1}r, & \text{falls } r \in [r_{l+1}, r_l), l = 1, \dots, q-1, \\ w_q, & \text{falls } r \geq r_1. \end{cases}$$

Da $\tilde{\gamma}_{J(q)}(0) = 0$ und $\tilde{\gamma}_{J(q)}$ stetig ist mit $|\frac{\delta \tilde{\gamma}_{J(q)}}{\delta r}| \leq 1$ für fast alle $r > 0$, gilt insbesondere

$$|\tilde{\gamma}_{J(q)}(r)| \leq r \quad \text{für alle } r \geq 0.$$

Induktions-Schluß : Nach Lemma 2.5.3 hat die Gedächtnisfunktion $\tilde{\gamma}_{J(p+1)}$ die Gestalt

$$\tilde{\gamma}_{J(p+1)}(r) = \begin{cases} \min\{r, \tilde{\gamma}_{J(p)} + w_{p+1} - w_p\}, & \text{falls } w_{p+1} > w_p, \\ \max\{-r, \tilde{\gamma}_{J(p)} + w_{p+1} - w_p\}, & \text{falls } w_{p+1} < w_p. \end{cases} \quad (2.37)$$

Für $r \geq r_1 > |w_{p+1}|$ folgt aus der Induktions-Voraussetzung

$$\tilde{\gamma}_{J(p+1)}(r) = w_{p+1}.$$

Da die Folge (w_1, \dots, w_{p+1}) wesentlich ist, folgt mit $w_0 := -w_1$ aus der Definition 2.5.8 für jedes $i \in \{1, \dots, p\}$

$$\text{sign}(w_{i+1} - w_i) \text{sign}(w_i - w_{i-1}) = -1.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \text{sign}(w_1) \text{sign}(w_{p+1} - w_p) &= \text{sign}(2w_1) \prod_{i=2}^p (\text{sign}(w_i - w_{i-1}))^2 \text{sign}(w_{p+1} - w_p) \\ &= \prod_{i=1}^p \text{sign}(w_{i+1} - w_i) \text{sign}(w_i - w_{i-1}) = (-1)^p. \end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$(-1)^{p+1} \text{sign}(w_1) \text{sign}(w_{p+1} - w_p) = (-1)^{2p+1} = -1.$$

Für $r \in [0, r_p)$ gilt also

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{J(p)}(r) &= \text{sign}(w_1)(-1)^{p+1}r = \text{sign}(w_{p+1} - w_p)(-r), \\ \tilde{\gamma}_{J(p+1)}(r) &= \begin{cases} \min\{r, -r + w_{p+1} - w_p\} = \min\{r, -r + 2r_{p+1}\}, & \text{falls } w_{p+1} > w_p, \\ \max\{-r, r + w_{p+1} - w_p\} = \max\{-r, r - 2r_{p+1}\}, & \text{falls } w_{p+1} < w_p. \end{cases} \end{aligned}$$

Für $r \in [0, r_{p+1})$ folgt daraus

$$\tilde{\gamma}_{J(p+1)}(r) = r \operatorname{sign}(w_{p+1} - w_p) = r \operatorname{sign}(w_1)(-1)^p$$

und für $r \in [r_{p+1}, r_p)$

$$\tilde{\gamma}_{J(p+1)}(r) = -r \operatorname{sign}(w_{p+1} - w_p) + w_{p+1} - w_p = r \operatorname{sign}(w_1)(-1)^{p+1} + w_{p+1} - w_p.$$

Ist $p = 1$, so haben wir eine explizite, analytische Beschreibung der Gedächtnisfunktion $\tilde{\gamma}_{J(p+1)}$ bestimmt.

Da die Folge (w_1, \dots, w_n) nach Lemma 2.5.9 wesentlich ist, gilt

$$w_{p+1} \in \begin{cases} (w_{p-1}, w_p), & \text{falls } w_{p-1} < w_p, \\ (w_p, w_{p-1}), & \text{falls } w_{p-1} > w_p. \end{cases}$$

Deshalb gilt für $p \geq 2$ für jedes $a \in \mathbb{R}$

$$|w_{p+1} - a| \leq \max\{|w_p - a|, |w_{p-1} - a|\}.$$

Daraus und aus der Induktions-Voraussetzung folgt für jedes $l \in \{1, \dots, p-1\}$ und $r \in [r_{l+1}, r_l)$

$$\begin{aligned} & |w_{p+1} - w_l + \operatorname{sign}(w_1)(-1)^{l+1}r| \\ & \leq \max\{|w_p - w_l + \operatorname{sign}(w_1)(-1)^{l+1}r|, |w_{p-1} - w_l + \operatorname{sign}(w_1)(-1)^{l+1}r|\} \\ & = \max\{|\tilde{\gamma}_{J(p)}(r)|, |\tilde{\gamma}_{J(p-1)}(r)|\} \leq r. \end{aligned}$$

Zusammen mit (2.37) ergibt sich für jedes $l \in \{1, \dots, p-1\}$ und $r \in [r_{l+1}, r_l)$

$$\tilde{\gamma}_{J(p+1)}(r) = w_{p+1} - w_l + \operatorname{sign}(w_1)(-1)^{l+1}r = \varepsilon_{J(p+1)} - w_l + \operatorname{sign}(w_1)(-1)^{l+1}r.$$

□

Bemerkung 2.5.13 Bei der exakten Berechnung der Gedächtnisfunktion zur endlichen Folge $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ kann die Länge der zugehörigen Folge der wesentlichen Extrema gleich der Länge von ε sein, da beide Folgen identisch sein können.

Durch die im folgenden definierte diskretisierte Gedächtnisfunktion kann die Auswertung des Prandtl-Ishlinskii-Operators vereinfacht werden.

Sei $\mu > 0$ ein Diskretisierungsparameter. Sei $\mu\mathbb{Z} = \{\mu z : z \in \mathbb{Z}\}$ ein Gitter auf \mathbb{R} . Für $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in S(\mathbb{R})$ definieren wir die Gitterabbildung G_μ

$$G_\mu : \begin{cases} S(\mathbb{R}) & \rightarrow S(\mu\mathbb{Z}), \\ \varepsilon & \mapsto \varepsilon^\mu = (\varepsilon_0^\mu, \dots, \varepsilon_k^\mu), \end{cases} \quad (2.38)$$

mit $\varepsilon_i^\mu := \max_{m \in \mu\mathbb{Z}} \{m \leq \varepsilon_i\}$, für $i = 0, \dots, k$.

Die μ -diskretisierte Gedächtnisfunktion $\tilde{\gamma}_k^\mu: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ zur Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ ist definiert durch

$$\tilde{\gamma}_k^\mu(r) := \tilde{s}_{r,f}^\mu((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) := \tilde{s}_{r,f}((\varepsilon_0^\mu, \dots, \varepsilon_k^\mu)). \quad (2.39)$$

Das Ersetzen der diskreten Gedächtnisfunktion durch die μ -diskretisierte Gedächtnisfunktion bietet die folgenden Vorteile:

- Ist die Input-Folge $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ beschränkt, d. h. ist $\max_{0 \leq i \leq k} |\varepsilon_i| \leq R \leq \mu N$ für ein $N \in \mathbb{N}$, dann hat die Folge der wesentlichen Extrema von ε^μ höchstens die Länge $2N$ unabhängig von der Länge von ε .
- Die Glieder der Folge der wesentlichen Extrema von ε^μ lassen sich als Integer-Werte speichern.
- Die „Ecken“ des Graphen von $\tilde{\gamma}_k^\mu$, d. h. die Punkte $(r, \tilde{\gamma}_k^\mu(r))$, wobei $\tilde{\gamma}_k^\mu$ in r die Steigung wechselt, liegen in $\frac{\mu}{2}\mathbb{N} \times \frac{\mu}{2}\mathbb{Z}$.

In Lemma 2.6.8 werden wir eine Abschätzung für den Fehler, der durch die μ -Diskretisierung der Gedächtnisfunktion entsteht, herleiten.

2.5.2 Identifizierung der Verteilungsfunktion

Soll der Prandtl-Ishlinskii-Operator zur Beschreibung der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung realer Materialien verwendet werden, so muß die den Operator bestimmende Verteilungsfunktion ν aus den Materialdaten ermittelt werden. Das durch das Modell gegebene Spannungs-Verzerrungs-Verhalten kann nur dann mit dem realen Materialverhalten übereinstimmen, wenn das Material qualitativ dasselbe ratenunabhängige Hystereseverhalten zeigt, insbesondere was die Form der inneren Schleifen betrifft, wie es durch den Prandtl-Ishlinskii-Operator modelliert und in den Abschnitten 2.3 und 2.5.1 beschrieben wurde. In Materialien auftretende Effekte, wie nichtlineare Elastizität, Viskosität, Einspielvorgänge bei zyklischer Belastung oder Bruch, werden durch den Prandtl-Ishlinskii-Operator nicht modelliert. Das Lemma 2.5.16 wird zeigen, daß die Verteilungsfunktion ν des Prandtl-Ishlinskii-Operators mit Hilfe der Erstbelastungskurve Ψ_e bestimmt werden kann. Die Erstbelastungskurve Ψ_e ergibt sich aus Messungen und gibt die Spannung als Funktion der Verzerrung für monoton wachsende Verzerrung an. Dabei wird im ungestörten Zustand, d. h. mit gedächtnisfreiem Anfangszustand und verschwindender Anfangsverzerrung, gestartet.

Da sich das Abbildungsverhalten des Prandtl-Ishlinskii-Operators durch Verschiebung der monoton wachsenden und beschränkten Verteilungsfunktion ν um eine Konstante nicht ändert, sei $\nu(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = 0$ angenommen.

Die im folgenden definierte Formfunktion ist der gedächtnisfreie Zweig des durch die Verteilungsfunktion ν definierten Prandtl-Ishlinskii-Operators. Sie beschreibt also die Spannungs-Verzerrungs-Relation bei gedächtnisfreiem Anfangswert für monotone Input-Funktionen.

Definition 2.5.14 Sei die Funktion $\varepsilon : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\varepsilon(\tau) := \tau$. Sei γ_τ die Gedächtnisfunktion von ε zum Zeitpunkt τ . Für $\tau < 0$ sei γ_τ die Gedächtnisfunktion von $-\varepsilon$ zum Zeitpunkt $-\tau$. Dann ist die **Formfunktion** $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zur monoton wachsenden und beschränkten Verteilungsfunktion ν definiert durch das uneigentliche Riemann-Stieltjes-Integral

$$\Psi(r) = \int_0^\infty \gamma_r(\rho) d\nu(\rho).$$

Die Einschränkung der Formfunktion Ψ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt **Erstbelastungskurve** Ψ_e zur Verteilungsfunktion ν .

Bemerkung 2.5.15 Nach der Bemerkung 2.5.2 ist $\gamma_r = \tilde{\gamma}_1$, wobei $\tilde{\gamma}_1$ die diskrete Gedächtnisfunktion zur endlichen Folge $(0, r)$ ist. Nach dem Lemma 2.5.5 hat die Gedächtnisfunktion γ_r die Form

$$\gamma_r(\rho) = \tilde{\gamma}_1(\rho) = \begin{cases} \text{sign}(r)\rho, & \text{falls } \rho < |r|, \\ r, & \text{falls } \rho \geq |r|. \end{cases}$$

Ist $\tilde{\mathcal{P}}_f$ die Endauswertung des durch ν definierten diskreten Prandtl-Ishlinskii-Operators, dann gilt für jedes $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_f((r)) &= \tilde{\mathcal{P}}_f((0, r)) = \int_0^\infty \tilde{s}_{\rho, f}((0, r)) d\nu(\rho) = \int_0^\infty \tilde{\gamma}_1(\rho) d\nu(\rho) \\ &= \int_0^\infty \gamma_r(\rho) d\nu(\rho) = \Psi(r). \end{aligned}$$

Lemma 2.5.16 Für jedes $\nu \in BV(0, \infty)$, $\nu(\infty) = 0$, besteht der folgende Zusammenhang zwischen der Verteilungsfunktion ν und der Erstbelastungskurve Ψ_e :

$$\Psi_e(r) = - \int_0^r \nu(s) ds.$$

Beweis:

Die Gedächtnisfunktion γ_ε aus Definition 2.5.14 hat für die reelle Zahl $\varepsilon \geq 0$ nach Bemerkung 2.5.15 die Form

$$\gamma_\varepsilon(r) = \begin{cases} r, & \text{falls } r < \varepsilon, \\ \varepsilon, & \text{falls } r \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Nach der Definition der Erstbelastungskurve und nach Satz A.0.6 gilt für jedes $\varepsilon \geq 0$

$$\begin{aligned} \Psi_e(\varepsilon) &= \int_0^\infty \gamma_\varepsilon(r) d\nu(r) = \int_0^\varepsilon r d\nu(r) + \varepsilon \int_\varepsilon^\infty d\nu(r) \\ &= - \int_0^\varepsilon \nu(r) dr + \nu(\varepsilon)\varepsilon - \nu(0)0 + \varepsilon \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \int_\varepsilon^R d\nu(r) \right) \\ &= - \int_0^\varepsilon \nu(r) dr + \nu(\infty)\varepsilon = - \int_0^\varepsilon \nu(r) dr. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.5.17 Der Prandtl-Ishlinskii-Operator ist ungerade, d. h. für jedes $\varepsilon \in C([0, T])$ gilt

$$\mathcal{P}[\varepsilon] = -\mathcal{P}[-\varepsilon].$$

Insbesondere ist auch die Formfunktion Ψ ungerade:

$$\Psi(x) = -\Psi(-x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis:

Dies folgt direkt aus (2.40), (2.41), da die von ε bzw. $-\varepsilon$ erzeugten Gedächtnisfunktionen zum Zeitpunkt t symmetrisch bzgl. der x-Achse sind. \square

Wird der Prandtl-Ishlinskii-Operator aus einer gegebenen Erstbelastungskurve Ψ_e identifiziert, dann zeigt der folgende Satz, daß zur Berechnung des Bildes einer endlichen Input-Folge bezüglich der Endauswertung des zugehörigen diskreten Prandtl-Ishlinskii-Operators nicht das (ggf. numerische) Differenzieren von Ψ_e entsprechend Lemma 2.5.16 nötig ist, sondern die Auswertung der durch Ψ_e eindeutig bestimmten Formfunktion Ψ an diskreten Punkten, die durch die wesentlichen Extrema der Input-Folge festgelegt werden, genügt.

Satz 2.5.18 *Zu jeder endlichen Input-Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ läßt sich das Bild bezüglich der Endauswertung eines diskreten Prandtl-Ishlinskii-Operators mit Hilfe der zugehörigen Formfunktion Ψ und der Folge (w_1, \dots, w_n) der wesentlichen Extrema von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ auf die folgende Weise berechnen:*

$$\sigma_k = \tilde{\mathcal{P}}_f((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \tilde{\mathcal{P}}_f((w_1, \dots, w_n)) = 2 \sum_{i=2}^n \Psi\left(\frac{w_i - w_{i-1}}{2}\right) + \Psi(w_1).$$

Beweis:

Sei H die Heaviside-Funktion aus der Definition 2.3.8. Nach Lemma 2.5.7 erzeugen die endlichen Folgen $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ und (w_1, \dots, w_n) identische Gedächtnisfunktionen. Aus Proposition 2.5.12 folgt die folgende Charakterisierung der Gedächtnisfunktion $\tilde{\gamma}_k$ zur endlichen Input-Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ mit der zugehörigen Folge der wesentlichen Extrema (w_1, \dots, w_n) :

$$\tilde{\gamma}_k(0) = 0, \quad (2.40)$$

$$\frac{d}{dr} \tilde{\gamma}_k|_{A_p^k}(r) = \text{sign}(w_1) (-1)^p = (-1)^{p+H(w_1)-1}, \quad \text{für } p = 2, \dots, n+1, \quad (2.41)$$

$$\text{mit } A_p^k := (r_p, r_{p-1}) \text{ für } 2 \leq p \leq n \quad \text{und} \quad A_{n+1}^k := (0, r_n).$$

Der Beweis wird induktiv mit Hilfe der Charakterisierung der Gedächtnisfunktion $\tilde{\gamma}_k$ in (2.40) und (2.41) geführt. Im folgenden bezeichne $\tilde{\gamma}_j$ für jedes $j \in \{0, \dots, k\}$ die Gedächtnisfunktion der endlichen Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_j)$.

Sei $n = 1$. Bei genau einem wesentlichen Extremum w_1 ist das Bild von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ bezüglich der Endauswertung des diskreten Prandtl-Ishlinskii-Operators nach Bemerkung 2.5.15 durch die Formfunktion gegeben:

$$\sigma_k = \tilde{\mathcal{P}}_f((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \tilde{\mathcal{P}}_f((w_1)) = \Psi(w_1).$$

Sei $n > 1$. Nach Lemma 2.5.11 muß es zur endlichen Folge der wesentlichen Extrema (w_1, \dots, w_n) zu $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ ein $p < k$ geben, so daß (w_1, \dots, w_{n-1}) die Folge der wesentlichen Extrema zu $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p)$ ist. Mit der Notation aus (2.41) gilt

$$\begin{aligned} A_n^p &= (0, r_{n-1}) \supset (0, r_n) = A_{n+1}^k, \\ A_n^p &= (0, r_{n-1}) \supset (r_n, r_{n-1}) = A_n^k, \\ \text{und } A_i^k &= A_i^p \quad \text{für } 2 \leq i < n. \end{aligned}$$

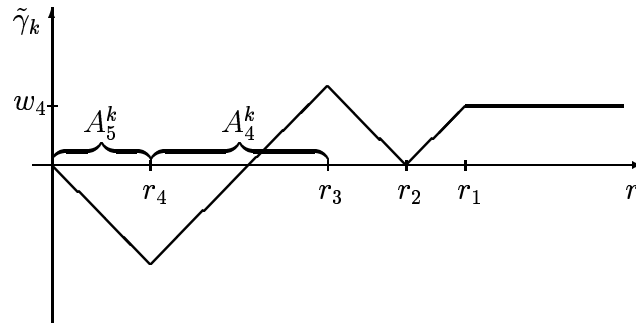


Abbildung 2.7: Gedächtnisfunktion $\tilde{\gamma}_k$, $k = 6$, aus Abb. 2.6 zur Input-Folge aus Abb. 2.5, $n = 4$

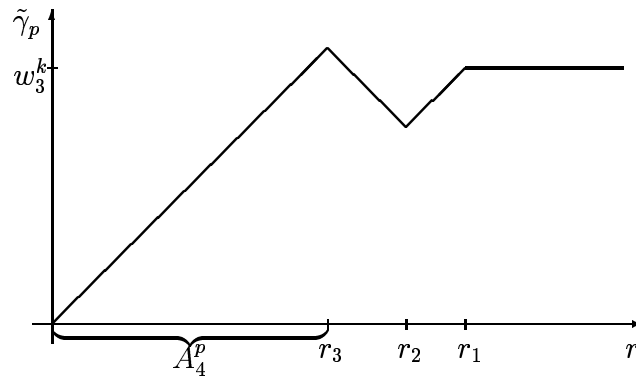


Abbildung 2.8: Gedächtnisfunktion $\tilde{\gamma}_p$, $p = 5$, zur Folge der wesentlichen Extrema (w_1, \dots, w_3) aus Abb. 2.5

Für die Funktion $(\tilde{\gamma}_k - \tilde{\gamma}_p)(r)$ gilt deshalb und wegen der Gleichungen (2.40) und (2.41)

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\gamma}_k - \tilde{\gamma}_p)(0) &= 0, \\
 \frac{d}{dr}(\tilde{\gamma}_k - \tilde{\gamma}_p)|_{A_{n+1}^k}(r) &= \frac{d}{dr}\tilde{\gamma}_k|_{A_{n+1}^k}(r) - \frac{d}{dr}\tilde{\gamma}_p|_{A_n^p \cap A_{n+1}^k}(r) \\
 &= (-1)^{H(w_1)+n} - (-1)^{H(w_1)+n-1} = 2(-1)^{H(w_1)+n}, \\
 \frac{d}{dr}(\tilde{\gamma}_k - \tilde{\gamma}_p)|_{A_i^k}(r) &= (-1)^{H(w_1)+i-1} - (-1)^{H(w_1)+i-1} = 0, \quad \text{für } i = 2, \dots, n.
 \end{aligned}$$

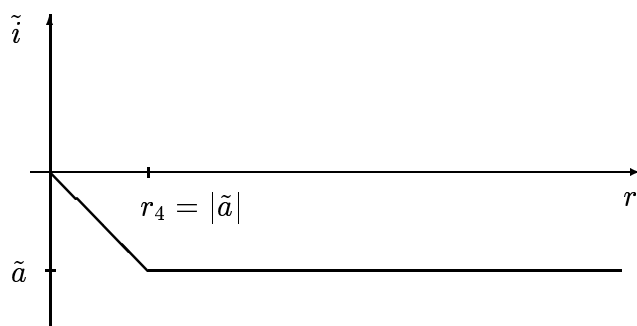
Wir definieren $\tilde{i}(r) := \frac{1}{2}(\tilde{\gamma}_k - \tilde{\gamma}_p)(r)$. Dann ist \tilde{i} die Gedächtnisfunktion bezüglich der Input-Folge (\tilde{a}) mit

$$\tilde{a} := r_n(-1)^{H(w_1)+n} = \frac{|w_n - w_{n-1}^k|}{2}(-1)^{H(w_1)+n} = \frac{w_n - w_{n-1}}{2},$$

wobei r_n in Gleichung (2.35) definiert wird.

Das Bild von (\tilde{a}) bezüglich der Endauswertung des diskreten Prandtl-Ishlinskii-Operators stimmt mit dem Funktionswert der Formfunktion im Punkt \tilde{a} überein. Es gilt also

$$\sigma_k = \int_0^\infty \tilde{\gamma}_k(r) d\nu(r) = \int_0^\infty \tilde{\gamma}_p(r) d\nu(r) + 2 \int_0^\infty \tilde{i}(r) d\nu(r) = \sigma_p + 2\Psi\left(\frac{w_n - w_{n-1}}{2}\right).$$

Abbildung 2.9: Gedächtnisfunktion \tilde{i} zur Input-Folge (\tilde{a})

Induktiv folgt

$$\sigma_k = 2 \sum_{i=2}^n \Psi \left(\frac{w_i - w_{i-1}}{2} \right) + \Psi(w_1).$$

□

2.5.3 Approximation der Verteilungsfunktion

Für die Verteilungsfunktion ν setzen wir wie im Abschnitt 2.5.2 voraus, daß $\nu(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = 0$ ist. Sei also $-\infty < \nu(0) < 0$, $\nu : [0, \infty) \rightarrow [\nu(0), 0]$. Nach Lemma 2.5.16 ist dann die zugehörige Erstbelastungskurve Ψ_e eine nicht fallende, konkave Funktion. Zu dem durch die Verteilungsfunktion ν bestimmten Prandtl-Ishlinskii-Operator \mathcal{P} definieren wir im folgenden zwei Familien von approximierenden Verteilungsfunktionen ν_δ und zugehörigen Prandtl-Ishlinskii-Operatoren \mathcal{P}^δ , $\delta > 0$. Wir approximieren ν zunächst durch stückweise konstante Funktionen und danach durch stetige, stückweise affine Funktionen.

Approximation der Verteilungsfunktion ν durch eine stückweise konstante Funktion

Definition 2.5.19 Sei $\nu : [0, \infty) \rightarrow [\nu(0), 0]$, $-\infty < \nu(0) < \lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = 0$, eine monoton wachsende Funktion. ν ist also von beschränkter Variation und in jedem beschränkten Intervall Riemann-integrierbar. Sei $\delta > 0$. Wir definieren die stückweise konstante Verteilungsfunktion

$$\nu_\delta(r) := \frac{1}{\delta} \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} \nu(s) ds \quad \text{für } r \in [(j-1)\delta, j\delta), \quad j \in \mathbb{N}. \quad (2.42)$$

Wir definieren den Prandtl-Ishlinskii-Operator $\mathcal{P}^\delta : C([0, T]) \rightarrow C([0, T])$ durch das uneigentliche Riemann-Stieltjes-Integral (vgl. Abschnitt 2.3)

$$\mathcal{P}^\delta[\varepsilon](t) := \int_0^\infty \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) d\nu_\delta(r), \quad t \in [0, T]. \quad (2.43)$$

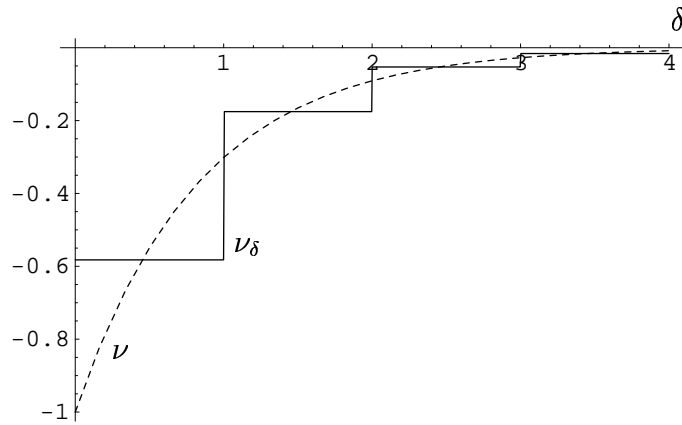


Abbildung 2.10: Verteilungsfunktion ν und stückweise konstante Approximierende ν_δ

Bemerkung 2.5.20 ν_δ ist monoton wachsend und beschränkt, da für alle $r \geq 0$ gilt

$$\nu(0) \leq \nu_\delta(r) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \nu_\delta(r) = 0.$$

Insbesondere ist also auch ν_δ von beschränkter Variation und in jedem beschränkten Intervall Riemann-integrierbar.

Da ν_δ stückweise konstant ist, wobei die Sprungstellen in der Menge $\{j\delta : j \in \mathbb{N}\}$ liegen, hat das uneigentliche Riemann-Stieltjes-Integral von γ_t , $\gamma_t(r) := \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t)$, bezüglich ν_δ den Wert

$$\mathcal{P}^\delta[\varepsilon](t) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{s}_{j\delta}[\varepsilon](t) (\nu_\delta(j\delta) - \nu_\delta((j-1)\delta)), \quad t \in [0, T]. \quad (2.44)$$

Nach Lemma 2.5.16 gilt für die Erstbelastungskurve $\Psi_{e,\delta}$ zu ν_δ

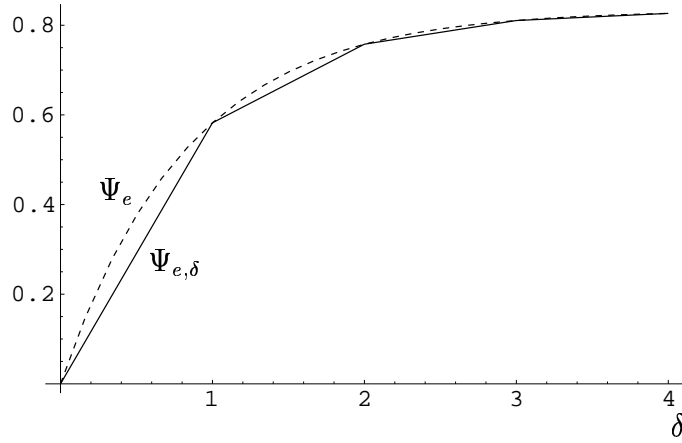
$$\Psi_{e,\delta}(\varepsilon) = - \int_0^\varepsilon \nu_\delta(r) dr. \quad (2.45)$$

$\Psi_{e,\delta}$ ist also eine stückweise affine und konkave Funktion. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \Psi_{e,\delta}(j\delta) &= - \int_0^{j\delta} \nu_\delta(r) dr = - \sum_{i=1}^j \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} \left(\frac{1}{\delta} \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} \nu(s) ds \right) dr \\ &= - \int_0^{j\delta} \nu(s) ds = \Psi_e(j\delta), \end{aligned} \quad (2.46)$$

wobei Ψ_e die Erstbelastungskurve und Ψ die Formfunktion zu ν sei. Die Erstbelastungskurve $\Psi_{e,\delta}$ zu ν_δ stimmt also in den Knoten $j\delta$, $j \in \mathbb{N}$, mit der Erstbelastungskurve Ψ_e zu ν überein.

Im folgenden werden zwei verschiedene Ansätze vorgestellt, wie das Bild der endlichen Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ unter der Endauswertung des diskreten Prandtl-Ishlinskii-Operators $\tilde{\mathcal{P}}_f^\delta$ zu ν_δ berechnet werden kann.

Abbildung 2.11: Erstbelastungskurven Ψ_e und $\Psi_{e,\delta}$

Auswertung von $\tilde{\mathcal{P}}_f^\delta$ ohne Rückgriff auf die wesentlichen Extrema:

$\tilde{\mathcal{P}}_f^\delta$ bezeichne die Endauswertung des diskreten Prandtl-Ishlinskii-Operators zu \mathcal{P}^δ aus (2.43).

Sei $[a] := \max_{z \in \mathbb{Z}} \{z : z \leq a\}$. Für die endliche Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in S(\mathbb{R})$ definieren wir

$$I_k := \left\lceil \max_{0 \leq j \leq k} \frac{|\varepsilon_j|}{\delta} \right\rceil, \\ \beta_j := \nu_\delta(j\delta) - \nu_\delta((j-1)\delta), \quad \text{für } j \in \mathbb{N}.$$

Für $j \in \{1, \dots, I_k\}$ gilt wegen Lemma 2.5.16

$$\beta_j = \frac{\Psi_e((j+1)\delta) - 2\Psi_e(j\delta) + \Psi_e((j-1)\delta)}{\delta}.$$

Es gilt dann

$$\sum_{j=I^k+1}^{\infty} \tilde{\mathfrak{s}}_{j\delta,f}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) \beta_j = \varepsilon_k \sum_{j=I^k+1}^{\infty} \beta_j = \varepsilon_k (\nu_\delta(\infty) - \nu_\delta(I^k\delta)) = -\nu_\delta(I^k\delta) \varepsilon_k.$$

Darum ist

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_f^\delta((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) &= \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mathfrak{s}}_{j\delta,f}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) (\nu_\delta(j\delta) - \nu_\delta((j-1)\delta)) \\ &= \sum_{j=1}^{I^k} \tilde{\mathfrak{s}}_{j\delta,f}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) (\nu_\delta(j\delta) - \nu_\delta((j-1)\delta)) - \nu_\delta(I^k\delta) \varepsilon_k \\ &= \sum_{j=1}^{I^k} \tilde{\mathfrak{s}}_{j\delta,f}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) \beta_j - \left(\nu_\delta(0) + \sum_{j=1}^{I^k} \beta_j \right) \varepsilon_k \\ &= \sum_{j=1}^{I^k} (\tilde{\mathfrak{s}}_{j\delta,f}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) - \varepsilon_k) \beta_j + \frac{1}{\delta} \Psi_e(\delta) \varepsilon_k. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Das Bild von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ bezüglich der Endauswertung des Prandtl-Ishlinskii-Operators $\tilde{\mathcal{P}}_f^\delta$ läßt sich also mit Hilfe der Werte $\Psi_e(j\delta)$ der Erstbelastungskurve Ψ_e zur Verteilungsfunktion ν an den Knoten $j\delta$, $j \in \{0, \dots, I^k + 1\}$, und der Bilder von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ bezüglich der Endauswertung der Stop-Operatoren $\tilde{s}_{j\delta, f}$, $j \in \{1, \dots, I^k\}$, berechnen. Diese können induktiv bestimmt werden:

Induktions-Anfang: Für $k = 0$ definieren wir für $\varepsilon_0 \geq \delta$ und $j \in \{1, \dots, I^0\}$

$$s_j^0 := \tilde{s}_{j\delta, f}((\varepsilon_0)) = \begin{cases} j\delta, & \text{falls } \varepsilon_0 > 0, \\ -j\delta, & \text{falls } \varepsilon_0 < 0. \end{cases}$$

Für $\varepsilon_0 \geq \delta$ ergibt sich $\tilde{\mathcal{P}}_f^\delta((\varepsilon_0))$ aus Gleichung (2.47).

Für $\varepsilon_0 < \delta$ ist $I^0 = 0$ und es ist

$$\tilde{\mathcal{P}}_f^\delta((\varepsilon_0)) = -\nu_\delta(0)\varepsilon_0.$$

Induktions-Voraussetzung: Seien $k \geq 1$, ε_{k-1} und I^{k-1} bekannt. Falls $I^{k-1} \geq 1$ ist, seien $s_j^{k-1} = \tilde{s}_{j\delta, f}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{k-1}))$, $j \in \{1, \dots, I^{k-1}\}$ bereits bestimmt.

Induktions-Schluß : Zu gegebenem ε_k ist

$$I^k = \max\{I^{k-1}, \left\lceil \frac{|\varepsilon_k|}{\delta} \right\rceil\}.$$

Falls $I^k > I^{k-1}$ ist, dann ist nach Lemma 2.5.5 $\tilde{s}_{r, f}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \tilde{s}_{r, f}((\varepsilon_k))$ für jedes $r > 0$ und wir setzen für $j \in \{1, \dots, I^k\}$

$$s_j^k := \tilde{s}_{j\delta, f}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \tilde{s}_{j\delta, f}((\varepsilon_k)) = \begin{cases} j\delta, & \text{falls } \varepsilon_k > 0, \\ -j\delta, & \text{falls } \varepsilon_k < 0. \end{cases}$$

Falls $I^k = I^{k-1} \geq 1$ ist, dann setzen wir für $j \in \{1, \dots, I^k\}$

$$s_j^k := \tilde{s}_{j\delta, f}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \begin{cases} \min\{j\delta, s_j^{k-1} + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}\}, & \text{falls } \varepsilon_k \geq \varepsilon_{k-1}, \\ \max\{-j\delta, s_j^{k-1} + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}\}, & \text{falls } \varepsilon_k < \varepsilon_{k-1}. \end{cases}$$

Falls $I^k \geq 1$ ist, ergibt sich $\tilde{\mathcal{P}}_f^\delta((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k))$ aus Gleichung (2.47). Ist $I_k = 0$, dann ist

$$\tilde{\mathcal{P}}_f^\delta((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = -\nu_\delta(0)\varepsilon_k.$$

Auswertung von $\tilde{\mathcal{P}}_f^\delta$ mit Hilfe der wesentlichen Extrema:

Nach Definition 2.5.14 und Lemma 2.5.17 gilt für die Formfunktion Ψ_δ zur Verteilungsfunktion ν_δ

$$\Psi_\delta(\varepsilon) = \begin{cases} \Psi_{e, \delta}(\varepsilon), & \text{falls } \varepsilon \geq 0, \\ -\Psi_{e, \delta}(-\varepsilon), & \text{falls } \varepsilon < 0. \end{cases} \quad (2.48)$$

Nach Satz 2.5.18 läßt sich das Bild der endlichen Input-Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in S(\mathbb{R})$ bezüglich der Endauswertung des diskreten Hysterese-Operators $\tilde{\mathcal{P}}_f^\delta$ mit der zugehörigen Folge der wesentlichen Extrema (w_1, \dots, w_n) und der Formfunktion Ψ_δ zu ν_δ bestimmen:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_f^\delta((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) &= \int_0^\infty \tilde{s}_{r, f}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) d\nu_\delta(r) = \int_0^\infty \tilde{s}_{r, f}((w_1, \dots, w_n)) d\nu_\delta(r) \\ &= \tilde{\mathcal{P}}_f^\delta((w_1, \dots, w_n)) = 2 \sum_{i=2}^n \Psi_\delta\left(\frac{w_i - w_{i-1}}{2}\right) + \Psi_\delta(w_1). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Dazu ist die Formfunktion Ψ_δ also an Stellen, die durch die Folge der wesentlichen Extrema (w_1, \dots, w_n) bestimmt sind, auszuwerten.

Für $\varepsilon \in [j\delta, (j+1)\delta)$, $j \in \mathbb{N}_0$, ergibt sich aus (2.42), (2.45) und (2.46)

$$\begin{aligned}
\Psi_\delta(\varepsilon) &= \Psi_{e,\delta}(\varepsilon) = - \int_0^{j\delta} \nu_\delta(r) dr - \int_{j\delta}^\varepsilon \nu_\delta(r) dr \\
&= \Psi_{e,\delta}(j\delta) - \frac{1}{\delta} \int_{j\delta}^\varepsilon \left(\int_{j\delta}^{(j+1)\delta} \nu(s) ds \right) dr \\
&= \Psi_e(j\delta) + \frac{\varepsilon - j\delta}{\delta} \left(- \int_0^{(j+1)\delta} \nu(s) ds + \int_0^{j\delta} \nu(s) ds \right) \\
&= \Psi_e(j\delta) + \frac{\varepsilon - j\delta}{\delta} (\Psi_e((j+1)\delta) - \Psi_e(j\delta)) .
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Für $\varepsilon \in (-(j+1)\delta, -j\delta]$, $j \in \mathbb{N}_0$, gilt entsprechend wegen (2.48)

$$\Psi_\delta(\varepsilon) = -\Psi_{e,\delta}(-\varepsilon) = -\Psi_e(j\delta) + \frac{\varepsilon + j\delta}{\delta} (\Psi_e((j+1)\delta) - \Psi_e(j\delta)) .$$

Definition 2.5.21 Wir bezeichnen mit der Menge $S^R(\mathbb{R})$ der beschränkten, endlichen, reellen Folgen mit der Schranke $R > 0$ alle endlichen Folgen aus $S(\mathbb{R})$, deren Folgenglieder vom Betrage nicht größer als R sind.

Schränken wir den Definitionsbereich von $\tilde{\mathcal{P}}_\delta$ auf die Menge $S^R(\mathbb{R})$ ein, wobei $R \leq I\delta$ für ein $I \in \mathbb{N}$ sei, dann läßt sich die Gleichung (2.49) mit Hilfe von (2.50) und der $I+1$ Werte $\Psi_e(j\delta)$, $j \in \{0, \dots, I\}$, berechnen.

Die näherungsweise Auswertung des Prandtl-Ishlinskii-Operators wird weiter vereinfacht, wenn die diskrete Gedächtnisfunktion $\gamma_k(r) = \tilde{\mathbf{s}}_{r,f}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k))$ in der Gleichung (2.49) durch die μ -diskretisierte Gedächtnisfunktion aus Gleichung (2.39) in Bemerkung 2.5.13 ersetzt wird. Wir definieren den Operator $\tilde{\mathcal{P}}^{\delta,\mu} : S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$ mit Hilfe der μ -diskretisierten Gedächtnisfunktion:

$$\begin{aligned}
\pi_i \circ \tilde{\mathcal{P}}^{\delta,\mu}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) &:= \int_0^\infty \pi_i \circ \tilde{\mathbf{s}}_r^\mu((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) d\nu_\delta(r) \\
&= \int_0^\infty \pi_i \circ \tilde{\mathbf{s}}_r((\varepsilon_0^\mu, \dots, \varepsilon_k^\mu)) d\nu_\delta(r) \\
&= \pi_i \circ \tilde{\mathcal{P}}^\delta((\varepsilon_0^\mu, \dots, \varepsilon_k^\mu)), \quad i = 0, \dots, k,
\end{aligned}$$

wobei $\varepsilon_i^\mu = \max_{m \in \mu\mathbb{Z}} \{m \leq \varepsilon_i\}$, für $i = 0, \dots, k$, ist. Setzen wir $\mu = 2\delta$, dann läßt sich $\tilde{\mathcal{P}}_f^{\delta,2\delta}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) := \tilde{\mathcal{P}}_f^\delta((\varepsilon_0^{2\delta}, \dots, \varepsilon_k^{2\delta}))$ wie unter (2.49) lösen, wobei die Formfunktion Ψ_δ ausschließlich in Punkten der Menge $\{j\delta : j \in \{-I, \dots, I-1\}\}$ auszuwerten ist, in denen Ψ_δ und Ψ übereinstimmen:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{P}}_f^{\delta,2\delta}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) &= \tilde{\mathcal{P}}_f^\delta((\varepsilon_0^{2\delta}, \dots, \varepsilon_k^{2\delta})) = \tilde{\mathcal{P}}_f^\delta((w_1^{2\delta}, \dots, w_n^{2\delta})) \\
&= 2 \sum_{i=2}^n \Psi_\delta \left(\frac{w_i^{2\delta} - w_{i-1}^{2\delta}}{2} \right) + \Psi_\delta(w_1^{2\delta}) \\
&= 2 \sum_{i=2}^n \Psi \left(\frac{w_i^{2\delta} - w_{i-1}^{2\delta}}{2} \right) + \Psi(w_1^{2\delta}) .
\end{aligned}$$

Die Folge der wesentlichen Extrema hat höchstens die Länge $2I$. Zur Auswertung des Funktional $\tilde{\mathcal{P}}_f^{\delta, 2\delta}$ an der Stelle $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)$ sind also maximal $2I$ Werte der Menge $\{\pm \Psi_e(j\delta) : j \in \{0, \dots, I\}\}$ zu addieren.

Approximation der Verteilungsfunktion ν durch eine stetige, stückweise affine Funktion

Zur Vereinfachung der Notation werden in diesem Unterabschnitt die stetige, stückweise affine Verteilungsfunktion und der zugehörige Prandtl-Ishlinskii-Operator wieder mit ν_δ bzw. mit \mathcal{P}^δ bezeichnet.

Definition 2.5.22 Sei $\nu : [0, \infty) \rightarrow [\nu(0), 0]$, $-\infty < \nu(0) < \lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = 0$, eine monoton wachsende Funktion. Sei $\delta > 0$. Wir definieren die stetige, stückweise affine Verteilungsfunktion

$$\nu_\delta(r) := \nu((j-1)\delta) + \frac{r - (j-1)\delta}{\delta} (\nu(j\delta) - \nu((j-1)\delta)) \quad \text{für } r \in [(j-1)\delta, j\delta), j \in \mathbb{N}. \quad (2.51)$$

Wir definieren den Prandtl-Ishlinskii-Operator \mathcal{P}^δ durch

$$\mathcal{P}^\delta[\varepsilon](t) := \int_0^\infty \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) d\nu_\delta, \quad \text{für jedes } t \in [0, T]. \quad (2.52)$$

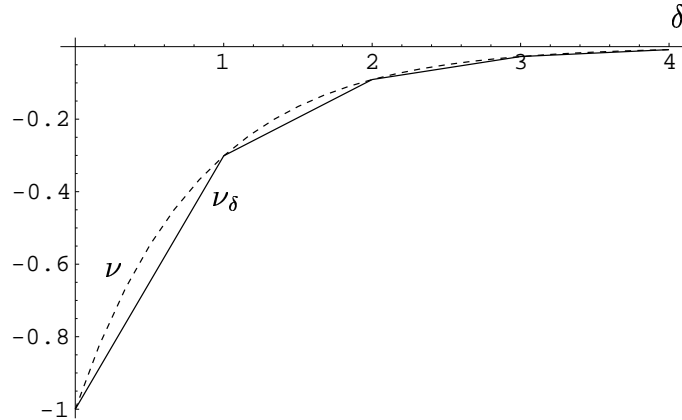


Abbildung 2.12: Verteilungsfunktion ν und stückweise affine Approximierende ν_δ

Bemerkung 2.5.23 Für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\nu_\delta(j\delta) = \nu(j\delta).$$

ν_δ ist monoton wachsend und beschränkt, da für alle $r \geq 0$ gilt

$$\nu(0) \leq \nu_\delta(r) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \nu_\delta(r) = 0.$$

Insbesondere ist also auch ν_δ von beschränkter Variation.

Auswertung von $\tilde{\mathcal{P}}_f^\delta$ mit Hilfe der wesentlichen Extrema:

Nach Lemma 2.5.16 gilt für die zugehörige Erstbelastungskurve $\Psi_{e,\delta}$

$$\Psi_{e,\delta}(\varepsilon) = - \int_0^\varepsilon \nu_\delta(r) dr. \quad (2.53)$$

$\Psi_{e,\delta}$ ist also konkav. Sei $I_l := \int_{(l-1)\delta}^{l\delta} \nu_\delta(r) dr = \frac{\delta}{2} (\nu((l-1)\delta) + \nu(l\delta))$. Für jedes $j \in \mathbb{N}$

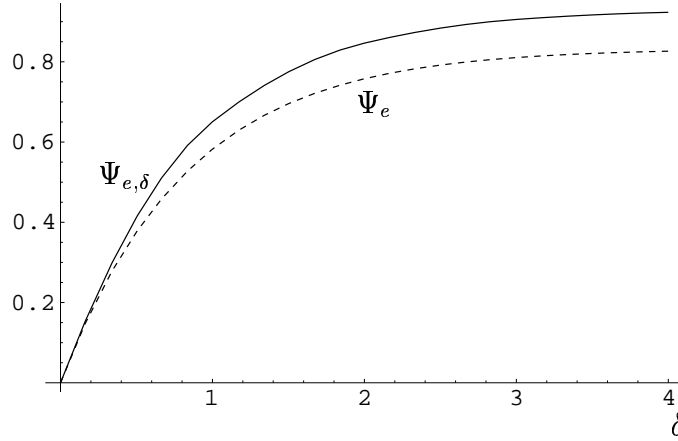


Abbildung 2.13: Erstbelastungskurven Ψ_e und $\Psi_{e,\delta}$

gilt

$$\begin{aligned} \Psi_{e,\delta}(j\delta) &= - \sum_{l=1}^j I_l = \Psi_{e,\delta}((j-1)\delta) - \frac{\delta}{2} (\nu((j-1)\delta) + \nu(j\delta)) \\ &= -\frac{\delta}{2} (\nu(0) + \nu(j\delta)) - \delta \sum_{l=1}^{j-1} \nu(l\delta). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Nach Definition 2.5.14 und Lemma 2.5.17 gilt für die zugehörige Formfunktion Ψ_δ

$$\Psi_\delta(\varepsilon) = \begin{cases} \Psi_{e,\delta}(\varepsilon), & \text{falls } \varepsilon \geq 0, \\ -\Psi_{e,\delta}(-\varepsilon), & \text{falls } \varepsilon < 0. \end{cases} \quad (2.55)$$

Nach Satz 2.5.18 läßt sich das Bild der endlichen Input-Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in S(\mathbb{R})$ bezüglich der zu \mathcal{P}^δ gehörigen Endauswertung des diskreten Hysteres-Operators $\tilde{\mathcal{P}}_f^\delta$ mit der zugehörigen Folge der wesentlichen Extrema (w_1, \dots, w_n) und der Formfunktion Ψ_δ zu ν_δ bestimmen:

$$\tilde{\mathcal{P}}_f^\delta((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \tilde{\mathcal{P}}_f^\delta((w_1, \dots, w_n)) = 2 \sum_{i=2}^n \Psi_\delta \left(\frac{w_i - w_{i-1}}{2} \right) + \Psi_\delta(w_1). \quad (2.56)$$

Dazu ist die Formfunktion Ψ_δ also an Stellen, die durch die Folge der wesentlichen Extrema (w_1, \dots, w_n) bestimmt sind, auszuwerten.

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^x (u(0) + s(u(1) - u(0))) ds &= xu(0) + \frac{x^2}{2}(u(1) - u(0)) \\ &= \frac{x}{2}(xu(1) + (2-x)u(0)). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Für $\varepsilon \in [j\delta, (j+1)\delta)$, $j \in \mathbb{N}_0$, ergibt sich aus (2.51), (2.53) und (2.57) mit $x := \frac{\varepsilon - j\delta}{\delta}$

$$\begin{aligned} \Psi_\delta(\varepsilon) &= \Psi_{e,\delta}(\varepsilon) = - \int_0^{j\delta} \nu_\delta(r) dr - \int_{j\delta}^{(j+x)\delta} \nu_\delta(r) dr \\ &= \Psi_{e,\delta}(j\delta) - \frac{\delta}{2}x(x\nu((j+1)\delta) + (2-x)\nu(j\delta)). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Für $\varepsilon \in (-(j+1)\delta, -j\delta]$, $j \in \mathbb{N}_0$, gilt wegen (2.55)

$$\Psi_\delta(\varepsilon) = -\Psi_{e,\delta}(-\varepsilon).$$

Schränken wir den Definitionsbereich von $\tilde{\mathcal{P}}_\delta$ auf $S^R(\mathbb{R})$ ein, wobei $R \leq I\delta$ für ein $I \in \mathbb{N}$ sei, dann läßt sich die Gleichung (2.56) mit Hilfe von (2.58) und (2.54) aus den Werten $\nu(j\delta)$, $j \in \{0, \dots, I\}$, berechnen.

Wir definieren den Operator $\tilde{\mathcal{P}}^{\delta,\mu} : S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$ mit Hilfe der μ -diskretisierten Gedächtnisfunktion aus Gleichung (2.39) in Bemerkung 2.5.13:

$$\begin{aligned} \pi_i \circ \tilde{\mathcal{P}}^{\delta,\mu}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) &:= \int_0^\infty \pi_i \circ \tilde{\mathbf{s}}_r^\mu((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) d\nu_\delta(r) \\ &= \int_0^\infty \pi_i \circ \tilde{\mathbf{s}}_r((\varepsilon_0^\mu, \dots, \varepsilon_k^\mu)) d\nu_\delta(r) \\ &= \pi_i \circ \tilde{\mathcal{P}}^\delta((\varepsilon_0^\mu, \dots, \varepsilon_k^\mu)), \quad i = 0, \dots, k, \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon_i^\mu = \max_{m \in \mu\mathbb{Z}} \{m \leq \varepsilon_i\}$, für $i = 0, \dots, k$ ist. Setzen wir $\mu = 2\delta$, dann läßt sich $\tilde{\mathcal{P}}_f^{\delta,2\delta}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) := \tilde{\mathcal{P}}_f^\delta((\varepsilon_0^{2\delta}, \dots, \varepsilon_k^{2\delta}))$ wie unter (2.56) lösen:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \tilde{\mathcal{P}}_f^{\delta,2\delta}((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k)) = \tilde{\mathcal{P}}_f^\delta((\varepsilon_0^{2\delta}, \dots, \varepsilon_k^{2\delta})) = \tilde{\mathcal{P}}_f^\delta((w_1^{2\delta}, \dots, w_n^{2\delta})) \\ &= 2 \sum_{i=2}^n \Psi_\delta\left(\frac{w_i^{2\delta} - w_{i-1}^{2\delta}}{2}\right) + \Psi_\delta(w_1^{2\delta}). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Da $\frac{w_i^{2\delta} - w_{i-1}^{2\delta}}{2} \in \delta\mathbb{Z}$ ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, müssen wegen (2.55) also nur die Bilder der Erstbelastungskurve $\Psi_{e,\delta}$ an den Knoten $j\delta$, $j \in \{1, \dots, I\}$, bekannt sein, um die Gleichung (2.59) zu lösen. Diese können mit Gleichung (2.54) bestimmt werden. Zur Auswertung des Funktional $\tilde{\mathcal{P}}_f^{\delta,2\delta}$ sind also maximal $2I$ Werte der Menge $\{\pm \Psi_{e,\delta}(j\delta) : j \in \{0, \dots, I\}\}$ zu addieren.

Im Gegensatz zur Approximation der Verteilungsfunktion ν durch eine stückweise konstante Funktion im vorhergehenden Abschnitt stimmen die Werte $\Psi_{e,\delta}(j\delta)$ nicht mit den Funktionswerten der gegebenen Erstbelastungskurve Ψ_e in den Knoten $j\delta$, $j \in \{0, \dots, I\}$, überein.

2.6 Untersuchungen zu den approximierenden Operatoren

Bei allen in diesem Abschnitt auftauchenden Integralen handelt es sich um Riemann- bzw. Riemann-Stieltjes-Integrale.

2.6.1 Hilfsmittel

Die folgenden Abschätzungen und Gleichungen werden für den Beweis der Fehlerabschätzungen im Abschnitt 2.6.2 benötigt.

Lemma 2.6.1 *Sei die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, monoton wachsend und damit Riemann-integrierbar. Für $N \in \mathbb{N}$, $\delta := \frac{1}{N}$, sei die Funktion $f_N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definiert durch*

$$f_N(x) := N \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} f(s) ds \quad \text{für } x \in [(j-1)\delta, j\delta), j \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.60)$$

Dann gilt

$$\int_0^1 |f - f_N|(x) dx \leq \frac{1}{N} (f(1) - f(0)).$$

Beweis:

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f - f_N|(x) dx &= \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} \left| f(x) - N \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} f(s) ds \right| dx \\ &\leq N \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} |f(x) - f(s)| ds dx \\ &\leq N \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} (f(j\delta) - f((j-1)\delta)) ds dx \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (f(j\delta) - f((j-1)\delta)) = \frac{1}{N} (f(1) - f(0)). \end{aligned}$$

□

Lemma 2.6.2 *Sei die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, monoton wachsend und damit Riemann-integrierbar. Dann gilt*

$$\int_0^1 |f(x) - x| dx \leq \frac{1}{2}.$$

Beweis:

Für $N \in \mathbb{N}$, $\delta := \frac{1}{N}$, sei $f_N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ die durch (2.60) definierte Funktion. f_N ist monoton wachsend. Da f_N stückweise konstant ist, gibt es höchstens endlich viele Punkte $a_1, \dots, a_n \in (0, 1)$, $a_1 < \dots < a_n$, für die gilt

$$\lim_{x \rightarrow a_i^-} f_N(x) \leq a_i \leq \lim_{x \rightarrow a_i^+} f_N(x), \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

wobei der linke bzw. der rechte Ausdruck, den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert von f_N an der Stelle a_i bezeichne. Existiert kein Punkt im Intervall $(0, 1)$, der diese Bedingung erfüllt, dann setzen wir $n := 0$. Seien $a_0 := 0$, $a_{n+1} := 1$. Wegen der Monotonie von f_N ist $a_i \leq f_N(x) \leq a_{i+1}$ im Intervall (a_i, a_{i+1}) , $i \in \{0, \dots, n\}$. Nach der Definition der a_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, wechselt $f_N(x) - x$ nicht das Vorzeichen in (a_i, a_{i+1}) . In (a_i, a_{i+1}) gilt also

$$|f_N(x) - x| \leq \begin{cases} x - a_i, & \text{falls } f_N(x) \leq x \text{ in } (a_i, a_{i+1}), \\ a_{i+1} - x, & \text{falls } f_N(x) \geq x \text{ in } (a_i, a_{i+1}). \end{cases} \quad (2.61)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - a_i) dx &= \frac{1}{2} (a_{i+1} - a_i)^2 \\ \text{und} \\ \int_{a_i}^{a_{i+1}} (a_{i+1} - x) dx &= \frac{1}{2} (a_{i+1} - a_i)^2. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Aus (2.61) und (2.62) folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_N(x) - x| dx &= \sum_{i=0}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f_N(x) - x| dx \leq \sum_{i=0}^n \frac{1}{2} (a_{i+1} - a_i)^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Daraus und aus Lemma 2.6.1 ergibt sich für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 |f(x) - x| dx \leq \int_0^1 |f - f_N|(x) dx + \int_0^1 |f_N(x) - x| dx \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{2}.$$

Also muß auch für f gelten

$$\int_0^1 |f(x) - x| dx \leq \frac{1}{2}.$$

□

Lemma 2.6.3 Sei f monoton wachsend, $-\infty < f(0) < \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0$. Sei $\delta > 0$. Die stetige, stückweise affine Funktion f_δ sei definiert durch

$$\begin{aligned} f_\delta(r) &:= f((j-1)\delta) + \frac{r - (j-1)\delta}{\delta} (f(j\delta) - f((j-1)\delta)) \\ &\text{für } r \in [(j-1)\delta, j\delta), j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\int_0^\infty |f - f_\delta|(x) dx \leq -\frac{\delta}{2} f(0).$$

Beweis:

Da f monoton wachsend ist, ist auch f_δ monoton wachsend. Also sind beide Funktionen in jedem Intervall $[(j-1)\delta, j\delta]$, $j \in \mathbb{N}$, Riemann-integrierbar. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} |f_\delta - f|(x) dx \\ = \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} \left| f((j-1)\delta) + \frac{x - (j-1)\delta}{\delta} (f(j\delta) - f((j-1)\delta)) - f(x) \right| dx. \end{aligned}$$

Die Substitution $g(y) := f((j-1)\delta + y\delta) - f((j-1)\delta)$, $y \in [0, 1]$, $x = (j-1)\delta + y\delta$, führt auf

$$\int_{(j-1)\delta}^{j\delta} |f_\delta - f|(x) dx = \delta \int_0^1 |yg(1) - g(y)| dy =: I.$$

Da f monoton wachsend ist, ist auch g monoton wachsend und nichtnegativ. Für $g(1) = 0$ gilt

$$I = \delta \int_0^1 |g(y)| dy = \delta \int_0^1 g(y) dy \leq \delta g(1) = 0 \leq \frac{\delta}{2} (f(j\delta) - f((j-1)\delta)).$$

Für $g(1) \neq 0$ und $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $h(y) := \frac{g(y)}{g(1)}$, gilt wegen Lemma 2.6.2

$$\begin{aligned} I &= \delta g(1) \int_0^1 \left| y - \frac{g(y)}{g(1)} \right| dy = \delta g(1) \int_0^1 |y - h(y)| dy \leq \frac{\delta}{2} g(1) \\ &= \frac{\delta}{2} (f(j\delta) - f((j-1)\delta)). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f_\delta - f|(x) dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} |f_\delta - f|(x) dx \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \frac{\delta}{2} (f(j\delta) - f((j-1)\delta)) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta}{2} (f(N\delta) - f(0)) \leq -\frac{\delta}{2} f(0). \end{aligned}$$

□

Lemma 2.6.4 Sei $\delta > 0$. Für jede konkave Funktion $u \in C^1([0, \delta])$ gilt

$$\int_0^\delta \left| u(r) - u(0) - \frac{r}{\delta} (u(\delta) - u(0)) \right| dr \leq \frac{\delta^2}{8} (u'(0) - u'(\delta)).$$

Beweis:

Da u konkav und stetig differenzierbar auf $[0, \delta]$ ist, gilt wegen Korollar A.0.9 und Definition A.0.8 für alle $a, b \in [0, \delta]$

$$u(b) \leq g_a(b) := u(a) + u'(a)(b - a) \quad (2.63)$$

und

$$u(r) \geq \frac{r}{\delta}u(\delta) + \left(1 - \frac{r}{\delta}\right)u(0) \quad \text{für alle } r \in [0, \delta]. \quad (2.64)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \left| u(r) - u(0) - \frac{r}{\delta}(u(\delta) - u(0)) \right| dr &= \int_0^\delta \left(u(r) - u(0) - \frac{r}{\delta}(u(\delta) - u(0)) \right) dr \\ &\leq \int_0^\delta \left(\min\{g_0(r), g_\delta(r)\} - u(0) - \frac{r}{\delta}(u(\delta) - u(0)) \right) dr \\ &= \int_0^\delta \left(\min\{u(0) + ru'(0), u(\delta) + (r - \delta)u'(\delta)\} - u(0) - \frac{r}{\delta}(u(\delta) - u(0)) \right) dr \\ &=: I \end{aligned}$$

Da u konkav ist, muß u' eine monoton fallende Funktion sein. Falls $u'(\delta) = u'(\xi) = u'(0)$ für alle $\xi \in (0, \delta)$ ist, ist $g_0(r) \equiv g_\delta(r)$ und wir definieren

$$a := \delta.$$

Falls $u'(\delta) < u'(0)$ ist, definieren wir

$$a := \frac{u(\delta) - u(0) - \delta u'(\delta)}{u'(0) - u'(\delta)}.$$

a ist so gewählt, daß $g_0(a) = g_\delta(a)$ ist.

Aus (2.63) folgt

$$0 \leq a.$$

Aus der Monotonie von u' folgt

$$u(\delta) - u(0) = \int_0^\delta u'(\xi) d\xi \leq \delta u'(0),$$

und damit ist

$$a \leq \delta.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} I &\leq \int_0^a r \left(u'(0) - \frac{u(\delta) - u(0)}{\delta} \right) dr + \int_a^\delta (\delta - r) \left(\frac{u(\delta) - u(0)}{\delta} - u'(\delta) \right) dr \\ &= \frac{1}{\delta} (u'(0) - u'(\delta)) \left((\delta - a) \int_0^a r dr + a \int_a^\delta (\delta - r) dr \right) \\ &= \frac{1}{2\delta} (u'(0) - u'(\delta)) (a^2(\delta - a) + a(\delta - a)^2) \\ &= \frac{\delta^2}{2} (u'(0) - u'(\delta)) \frac{a}{\delta} \left(1 - \frac{a}{\delta} \right) \leq \frac{\delta^2}{8} (u'(0) - u'(\delta)). \end{aligned} \quad \square$$

2.6.2 Fehlerabschätzungen

In diesem Abschnitt finden sich Abschätzungen für den Fehler, der gemacht wird, wenn die den Prandtl-Ishlinskii-Operator definierende Verteilungsfunktion ν durch die im Abschnitt 2.5.3 definierten stückweise konstanten beziehungsweise affinen Approximierenden ersetzt wird.

Der Fall der stückweise konstanten Approximation der Verteilungsfunktion entspricht einer stückweise affinen Interpolation der zugehörigen Erstbelastungskurve. Er erlaubt eine weitere Interpretation. Die Erstbelastungskurve Ψ_e kann in Messungen nie exakt bestimmt werden, sondern ist aus einer endlichen Anzahl von Spannungs-Verzerrungs-Werten geeignet zu interpolieren. Haben die diskreten Verzerrungs-Werte den äquidistanten Abstand δ und werden die diskreten Spannungs-Verzerrungs-Werte affin interpoliert, dann gibt die folgende Abschätzung eine obere Schranke für den Interpolations-Fehler an. Dabei wird vorausgesetzt, daß die unbekannte, exakte Erstbelastungskurve monoton wachsend und beschränkt ist.

Satz 2.6.5 *Sei $\nu : [0, \infty) \rightarrow [\nu(0), 0]$ eine monoton wachsende Funktion mit $-\infty < \nu(0) < \lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = 0$. Zu $\delta > 0$ sei \mathcal{P}^δ der in (2.43) definierte Operator. Dann gilt für jedes $\varepsilon \in C([0, T])$*

$$\sup_{t \in [0, T]} |(\mathcal{P}[\varepsilon] - \mathcal{P}^\delta[\varepsilon])(t)| \leq -\nu(0)\delta.$$

Beweis:

Wegen der Abschätzung (2.15) gilt für jedes $t \in [0, T]$ und $q < r$

$$|\mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) - \mathfrak{s}_q[\varepsilon](t)| \leq |r - q| = r - q. \quad (2.65)$$

Da ν monoton und beschränkt ist, ist ν von beschränkter Variation und in jedem beschränkten Intervall Riemann-integrierbar. Wegen der Voraussetzungen an ν ist auch die \mathcal{P}^δ bestimmende, in (2.42) definierte Verteilungsfunktion ν_δ monoton und beschränkt und damit von beschränkter Variation. Denn es gilt

$$\nu(0) \leq \nu_\delta(r) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \nu_\delta(r) = 0.$$

Die zugehörigen Operatoren \mathcal{P} und \mathcal{P}^δ sind somit wohldefiniert. Die partielle Integrations-Formel aus Satz A.0.6, die Beschränktheit der Gedächtnisfunktion γ_t , $\gamma_t(r) = \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t)$ sowie $\gamma_t(0) = 0$ für jedes $t \in [0, T]$ und $\lim_{R \rightarrow \infty} (\nu - \nu_\delta)(R) = 0$ liefern für jedes $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |(\mathcal{P}[\varepsilon] - \mathcal{P}^\delta[\varepsilon])(t)| &= \left| \int_0^\infty \gamma_t(r) d(\nu - \nu_\delta)(r) \right| = \left| \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \gamma_t(r) d(\nu - \nu_\delta)(r) \right| \\ &= \left| \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\gamma_t(R)(\nu - \nu_\delta)(R) - \gamma_t(0)(\nu - \nu_\delta)(0) - \int_0^R (\nu - \nu_\delta)(r) d\gamma_t(r) \right) \right| \\ &\leq \left| \lim_{R \rightarrow \infty} \gamma_t(R)(\nu - \nu_\delta)(R) \right| + \left| \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R (\nu - \nu_\delta)(r) d\gamma_t(r) \right| \\ &= \left| \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R (\nu - \nu_\delta)(r) d\gamma_t(r) \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_0^R (\nu - \nu_\delta)(r) d\gamma_t(r) \right|. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Wegen der Abschätzung (2.65) gilt für jede Zerlegung $Z := \{r_0, \dots, r_n\}$ von $[0, R]$ und für jeden Zwischenvektor (ξ_1, \dots, ξ_n) , $\xi_i \in [r_{i-1}, r_i]$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n (\nu - \nu_\delta)(\xi_k)(\gamma_t(r_k) - \gamma_t(r_{k-1})) \right| &\leq \sum_{k=1}^n |(\nu - \nu_\delta)(\xi_k)| |\gamma_t(r_k) - \gamma_t(r_{k-1})| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |(\nu - \nu_\delta)(\xi_k)| (r_k - r_{k-1}). \end{aligned}$$

Da die Funktionen ν und ν_δ monoton in $[0, R]$ sind, sind sie und damit auch $|\nu - \nu_\delta|_{|[0, R]}$ Riemann-integrierbar. Aus der Definition des Riemann-Stieltjes-Integrals folgt

$$\left| \int_0^R (\nu - \nu_\delta)(r) d\gamma_t(r) \right| \leq \int_0^R |(\nu - \nu_\delta)(r)| dr \leq \int_0^{(\lceil \frac{R}{\delta} \rceil + 1)\delta} |(\nu - \nu_\delta)(r)| dr. \quad (2.67)$$

Aus der Monotonie von ν folgt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_0^{N\delta} |(\nu - \nu_\delta)(r)| dr &\leq \sum_{j=1}^N \frac{1}{\delta} \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} |\nu(r) - \nu(s)| ds dr \\ &\leq \delta \sum_{j=1}^N (\nu(j\delta) - \nu((j-1)\delta)) = (\nu(N\delta) - \nu(0))\delta. \end{aligned}$$

Daraus und aus den Abschätzungen (2.66), (2.67) sowie der Nichtpositivität von ν folgt

$$|(\mathcal{P}[\varepsilon] - \mathcal{P}^\delta[\varepsilon])(t)| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} (\nu(N\delta) - \nu(0))\delta \leq -\nu(0)\delta.$$

□

Die beiden folgenden Sätze geben eine obere Schranke für den Fehler an, der durch die Approximation der Verteilungsfunktion durch eine stetige, stückweise affine Funktion wie in (2.51) gemacht wird.

Satz 2.6.6 *Sei $\nu : [0, \infty) \rightarrow [\nu(0), 0]$, $-\infty < \nu(0) < \lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = 0$ eine monoton wachsende Funktion. Zu $\delta > 0$ sei \mathcal{P}^δ der in (2.52) definierte Operator. Dann gilt für jedes $\varepsilon \in C([0, T])$*

$$\sup_{t \in [0, T]} |(\mathcal{P}[\varepsilon] - \mathcal{P}^\delta[\varepsilon])(t)| \leq -\frac{\nu(0)}{2}\delta.$$

Beweis:

$\gamma_t, \gamma_t(r) = \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t)$, bezeichne wieder die Gedächtnisfunktion zu ε zum Zeitpunkt t . Aus der Definition der \mathcal{P}^δ bestimmenden Verteilungsfunktion ν_δ in (2.51) folgt, daß $\nu - \nu_\delta$ in den Knoten $j\delta$, $j \in \mathbb{N}$, verschwindet. Die Funktionen ν und ν_δ sind monoton und beschränkt, also auch von beschränkter Variation, d. h. die zugehörigen Operatoren \mathcal{P}

und \mathcal{P}^δ sind wohldefiniert. Zusammen mit der partiellen Integrationsformel aus Satz A.0.6 ergibt sich für jedes $t \in [0, T]$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |(\mathcal{P}[\varepsilon] - \mathcal{P}^\delta[\varepsilon])(t)| &= \left| \int_0^\infty \gamma_t(r) d(\nu - \nu_\delta)(r) \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\delta} \gamma_t(r) d(\nu - \nu_\delta)(r) \right| \\ &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\gamma_t(n\delta)(\nu - \nu_\delta)(n\delta) - \gamma_t(0)(\nu - \nu_\delta)(0) - \int_0^{n\delta} (\nu - \nu_\delta)(r) d\gamma_t(r) \right) \right| \quad (2.68) \\ &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\delta} (\nu - \nu_\delta)(r) d\gamma_t(r) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^{n\delta} (\nu - \nu_\delta)(r) d\gamma_t(r) \right|. \end{aligned}$$

Wie im Beweis von Satz 2.6.5 folgt

$$\left| \int_0^{n\delta} (\nu - \nu_\delta)(r) d\gamma_t(r) \right| \leq \int_0^{n\delta} |(\nu - \nu_\delta)(r)| dr.$$

Daraus, aus Abschätzung (2.68) und aus Lemma 2.6.3 folgt

$$|(\mathcal{P}[\varepsilon] - \mathcal{P}^\delta[\varepsilon])(t)| \leq -\frac{\delta}{2} \nu(0).$$

□

Satz 2.6.7 Sei $\nu \in C^1([0, \infty))$, $-\infty < \nu(0) < \lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = 0$, eine monoton wachsende und konkave Funktion. Zu $\delta > 0$ sei \mathcal{P}^δ der in (2.52) definierte Operator. Dann gilt für jedes $\varepsilon \in C([0, T])$

$$\sup_{t \in [0, T]} |(\mathcal{P}[\varepsilon] - \mathcal{P}^\delta[\varepsilon])(t)| \leq \frac{\nu'(0)}{8} \delta^2.$$

Beweis:

Wie im Beweis des vorhergehenden Satzes 2.6.6 weisen wir die Gültigkeit der folgenden Abschätzung nach:

$$|(\mathcal{P}[\varepsilon] - \mathcal{P}^\delta[\varepsilon])(t)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\delta} |(\nu - \nu_\delta)(r)| dr = \int_0^\infty |(\nu - \nu_\delta)(r)| dr.$$

Wir definieren für jedes $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_j &:= \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} |(\nu - \nu_\delta)(r)| dr \\ &= \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} \left| \nu(r) - \nu((j-1)\delta) - \frac{r - (j-1)\delta}{\delta} (\nu(j\delta) - \nu((j-1)\delta)) \right| dr. \end{aligned}$$

Durch die Substitution $u(s) := \nu((j-1)\delta + s)$ für $s \in [0, \delta]$, $r = (j-1)\delta + s$ ergibt sich unter Anwendung von Lemma 2.6.4

$$\begin{aligned} I_j &= \int_0^\delta \left| u(s) - u(0) - \frac{s}{\delta} (u(\delta) - u(0)) \right| ds \leq \frac{\delta^2}{8} (u'(0) - u'(\delta)) \\ &= \frac{\delta^2}{8} (\nu'((j-1)\delta) - \nu'(j\delta)). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Da nach Voraussetzung ν' nichtnegativ und monoton fallend und ν beschränkt ist, muß $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu'(n\delta) = 0$ gelten. Daraus und aus der Abschätzung (2.69) folgt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\nu(r) - \nu_\delta(r)| dr &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n I_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta^2}{8} \sum_{j=1}^n (\nu'((j-1)\delta) - \nu'(j\delta)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta^2}{8} (\nu'(0) - \nu'(n\delta)) = \frac{\delta^2}{8} \nu'(0). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$|(\mathcal{P}[\varepsilon] - \mathcal{P}^\delta[\varepsilon])(t)| \leq \frac{\nu'(0)}{8} \delta^2.$$

□

Die folgende Abschätzung liefert den Fehler, der durch die Diskretisierung der Gedächtnisfunktion entsteht.

Lemma 2.6.8 *Seien $\mu > 0$ und $\mu\mathbb{Z} = \{n\mu : n \in \mathbb{Z}\}$ ein Gitter auf \mathbb{R} . Zu $\varepsilon := (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in S(\mathbb{R})$ definieren wir $\varepsilon^\mu \in S(\mu\mathbb{Z})$ durch $\varepsilon^\mu := G_\mu(\varepsilon)$, wobei G_μ die Gitterabbildung aus (2.38) ist. Zu $\delta > 0$ sei \mathcal{P}^δ der in (2.43) oder (2.52) definierte Prandtl-Ishlinskii-Operator. Sei $\mathcal{P}^0 := \mathcal{P}$. Dann gilt für den zugehörigen diskreten Prandtl-Ishlinskii-Operatoren $\tilde{\mathcal{P}}^\delta$, $\delta \geq 0$, und für jedes $\varepsilon \in S(\mathbb{R})$*

$$|\pi \circ \tilde{\mathcal{P}}^\delta(\varepsilon) - \pi \circ \tilde{\mathcal{P}}^\delta(\varepsilon^\mu)| \leq L\mu$$

mit $L := -\nu(0)$.

Beweis:

$\tilde{\varepsilon}$ bzw. $\tilde{\varepsilon}^\mu$ bezeichnen die affin Interpolierenden von ε bzw. ε^μ . Dann gilt aufgrund der Definition des zeitdiskreten Hysterese-Operators 2.4.4, der Lipschitz-Stetigkeit des Prandtl-Ishlinskii-Operators nach (2.19) und der gleichmäßigen Lipschitz-Konstante L der Familie von Approximationen nach Hilfssatz 2.6.9

$$\begin{aligned} |\pi \circ \tilde{\mathcal{P}}^\delta(\varepsilon) - \pi \circ \tilde{\mathcal{P}}^\delta(\varepsilon^\mu)| &= |\mathcal{P}^\delta[\tilde{\varepsilon}](T) - \mathcal{P}^\delta[\tilde{\varepsilon}^\mu](T)| \leq L \sup_{t \in [0, T]} |\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^\mu| \\ &= L \sup_{j \in \{0, \dots, k\}} |\varepsilon_j - \varepsilon_j^\mu| \leq L\mu. \end{aligned}$$

□

2.6.3 Gleichmäßige Lipschitz-Stetigkeit

In allen beiden betrachteten Fällen von Approximationen des Prandtl-Ishlinskii-Operators läßt sich eine einheitliche Lipschitz-Konstante der Familie von approximierenden Prandtl-Ishlinskii-Operatoren unabhängig vom Diskretisierungsparameter δ angeben.

Lemma 2.6.9 Sei $\nu : [0, \infty) \rightarrow [\nu(0), 0]$, $-\infty < \nu(0) < \lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = 0$, eine monoton wachsende Funktion. Ist die Familie von Approximierenden ν_δ , $\delta > 0$, wie in (2.42) oder (2.51) definiert, so gilt für jedes $\delta > 0$

$$\int_0^\infty d\nu_\delta(r) \leq \int_0^\infty d\nu(r) = -\nu(0).$$

Deshalb ist der Operator \mathcal{P}^δ Lipschitz-stetig im Sinne von (2.19) mit einer von δ unabhängigen Lipschitz-Konstante $L = -\nu(0)$.

Beweis:

Im Fall der Approximation von ν durch eine stückweise konstante Funktion wie in Definition (2.42) gilt für alle Diskretisierungsparameter $\delta > 0$ wegen der Monotonie von ν und da $\lim_{R \rightarrow \infty} \nu_\delta(R) = 0$ ist

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\nu_\delta(r) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R d\nu_\delta(r) = \lim_{R \rightarrow \infty} (\nu_\delta(R) - \nu_\delta(0)) \\ &= 0 - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \nu(s) ds \leq -\nu(0) = \int_0^\infty d\nu(r). \end{aligned}$$

Bei der Approximation von ν durch eine stetige, stückweise affine Funktion wie in Definition (2.51), ist ν_δ eine monoton wachsende, beschränkte Funktion, also von beschränkter Variation. Also existiert das Integral $\int_0^\infty d\nu_\delta$ und ist endlich. Da die Funktionen ν und ν_δ in den Knoten $j\delta$, $j \in \mathbb{N}$, identisch sind, gilt für alle $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\nu_\delta(r) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{R\delta} d\nu_\delta(r) = \lim_{R \rightarrow \infty} (\nu_\delta(R\delta) - \nu_\delta(0)) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} (\nu(R\delta) - \nu(0)) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{R\delta} d\nu(r) = \int_0^\infty d\nu(r). \end{aligned}$$

□

2.7 Ortsabhängige Hysterese-Operatoren

Die bisher betrachteten Hysterese-Operatoren bilden zeitabhängige Funktionen auf zeitabhängige Funktionen ab. Sie sind geeignet Phänomene zu modellieren, die ausschließlich von der Zeit abhängen und zum Beispiel durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden können. In raumstrukturierten Problemen, wie sie bei partiellen Differentialgleichungen auftreten, muß eine Erweiterung des Modells eingeführt werden.

Definition 2.7.1 Seien $V \subset \text{Abb}(0, T)$ ein Banachraum, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ für ein $n \geq 1$ und $\mathcal{H} : V \rightarrow V$ ein Hysterese-Operator. Wir definieren für jede Funktion $u : \Omega \rightarrow V$

$$\mathfrak{H}[u](x) := \mathcal{H}[u(x)].$$

Bemerkung 2.7.2 \mathcal{H} wird also auf jeden Punkt $x \in \Omega$ unabhängig angewandt.

$$\mathfrak{H}[u](x, t) := \mathfrak{H}[u](x)(t) = \mathcal{H}[u(x)](t)$$

hängt von $u(x)|_{[0,t]}$, aber nicht von $u(y)|_{[0,t]}$ für $y \neq x$ ab. Dieses Modell kann Gedächtnis-Effekte, aber keine Rauminteraktionen wiedergeben.

Satz 2.7.3 Seien V, W Banachräume und X ein σ -endlicher Maßraum. Der Operator $b : X \times V \rightarrow W$ erfülle die Carathéodory-Bedingungen, d. h. es gelte

(i) $b(\cdot, v) : X \rightarrow W$ ist für jedes $v \in V$ meßbar,

(ii) $b(x, \cdot) : V \rightarrow W$ ist für fast jedes $x \in X$ stetig.

Sei $B : V^X \rightarrow W^X$ der zu b gehörige Superpositions-Operator definiert durch

$$B[u](x) := b(x, u(x)).$$

Seien $p, q \in [1, \infty)$. Gilt zusätzlich die Wachstums-Bedingung

$$\|b(x, v)\|_W^q \leq c \|v\|_V^p + g(x) \quad \text{für eine Funktion } g \in L^1(X) \text{ und eine Konstante } c, \quad (2.70)$$

so bildet B den Raum $L^p(X; V)$ stetig in $L^q(X; W)$ ab.

Beweis:

Für den Spezialfall $V = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $W = \mathbb{R}$ folgt diese Aussage aus [T87, Lemma 4.20], bzw. [Zei90b, Prop. 26.6]. Der Beweis läßt sich auf beliebige Banachräume V, W übertragen. \square

Bemerkung 2.7.4 Sei $v \in V$ fest gewählt. Ist $b(x, \cdot) = b(\cdot)$ unabhängig von x und Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L und ist das Lebesgue-Maß von X , $\lambda(X)$, endlich, dann ist die Wachstums-Bedingung (2.70) für jedes $p = q \in [1, \infty)$ erfüllt:

$$\begin{aligned} \|b(u)\|_W &\leq \|b(u) - b(v)\|_W + \|b(v)\|_W \leq L\|u - v\|_V + \|b(v)\|_W \\ &\leq L\|u\|_V + L\|v\|_V + \|b(v)\|_W = L\|u\|_V + C < \infty \end{aligned}$$

für eine Konstante C . Konstante Funktionen sind integrierbar, da X nach Voraussetzung endliches Maß hat.

Korollar 2.7.5 Seien $V \subset \text{Abb}(0, T)$ ein Banachraum, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ für ein $n \geq 1$ ein endlicher Maßraum bezüglich des Lebesgue-Maßes, $p \in [1, \infty)$ und $\mathcal{H} : V \rightarrow V$ ein Lipschitz-stetiger Hysterese-Operator. Dann bildet der in Definition 2.7.1 erklärte Operator \mathfrak{H} den Banachraum $L^p(\Omega; V)$ stetig in sich ab.

Beweis:

Dies folgt sofort aus dem Satz 2.7.3 und Bemerkung 2.7.4. \square

Bemerkung 2.7.6 Für den Beweis von Korollar 2.7.5 wird weder die Ratenunabhängigkeit noch die Volterra-Eigenschaft des Operators \mathcal{H} benötigt. Die Aussage gilt vielmehr für beliebige Lipschitz-stetige Operatoren $\mathcal{H} : V \rightarrow W$, wobei V und W Banachräume seien.

Kapitel 3

Die eindimensionale Wellengleichung mit Hysterese und ihre Diskretisierung

Im zweiten Teil dieser Arbeit koppeln wir einen Hysterese-Operator mit einem System von partiellen Differentialgleichungen. Wir untersuchen ein spezielles System von Erhaltungsgleichungen in einer Raumdimension. Dies ist ein System von nichtlinearen, hyperbolischen Differentialgleichungen erster Ordnung in Divergenzform

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_t + (\mathbf{F}[\mathbf{U}])_x &= 0, \\ \mathbf{U}(x, 0) &= \mathbf{U}_0(x),\end{aligned}$$

wobei in unserem Fall $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, t) \in \mathbb{R}^2$ ist und die Ortsvariable x aus einem beschränkten Intervall stammt. Damit das Problem wohlgestellt ist, werden wir zusätzlich fordern, daß die Lösung \mathbf{U} bestimmten Randbedingungen genügt.

In klassischen Modellen ist der Fluß \mathbf{F} durch einen Superpositions-Operator gegeben. Es gibt also eine hinreichend glatte Funktion $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, wobei in unserem Fall $p = 2$ ist, mit

$$\mathbf{F}[\mathbf{U}](x, t) = f(\mathbf{U}(x, t)).$$

Für derlei Systeme kann in vielen Fällen nicht die Existenz einer für alle Zeiten $t > 0$ glatten Lösung bewiesen werden. Statt dessen kann es zu Unstetigkeiten oder Singularitäten in der Lösung, sogenannten Schockwellen oder blow-ups, kommen. Um solche, physikalisch durchaus sinnvollen Lösungen auch als mathematische Lösungen zu akzeptieren, muß der klassische Lösungsbegriff abgeschwächt werden. Da solche schwachen Lösungen im allgemeinen nicht eindeutig sind, müssen weitere, üblicherweise physikalisch motivierte Bedingungen an die Lösung gestellt werden, um eine sinnvolle und eindeutige Lösung auszuzeichnen (vgl. [RR93, Chap. 3], [E98, Chap. 11]).

In dem von uns betrachteten System von Erhaltungsgleichungen kann der Fluß im allgemeinen nicht durch einen Superpositions-Operator beschrieben werden. Statt dessen ist eine Komponente des Flusses durch einen Hysterese-Operator gegeben. Erfüllt dieser Operator die im Abschnitt 3.2 genannten Eigenschaften, wozu insbesondere die richtige Form der Zweige des Hysterese-Operators, also der „Hystereseschleifen“, gehört, dann

kann die Existenz einer eindeutigen, stetigen Lösung bewiesen werden. Die oben genannten für allgemeine Erhaltungsgleichungen charakteristischen Phänomene treten also nicht auf.

3.1 Ausgangsproblem

Wir betrachten ein eindimensionales Modell für die Longitudinal- oder Torsionsschwingungen eines Stabes der Länge 1 von konstanter Massendichte unter dem Einfluß einer uniaxialen äußeren Kraftdichte g . Bezeichnen v , σ , ε Geschwindigkeit, Spannung und Verzerrung (in dieser Reihenfolge), so läßt sich die Impulsbilanz schreiben in der Form

$$v_t = \sigma_x + g, \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_t = v_x, \quad (3.2)$$

in $(0, 1) \times (0, T)$, wobei $T > 0$ eine gegebene, endliche Endzeit ist. Die Spannungs-Verzerrungs-Relation wird in der Form eines hysteretischen elastoplastischen Materialgesetzes angenommen, d. h. wir setzen für jedes $x \in [0, 1]$

$$\sigma(x, \cdot) = \mathcal{H}[\varepsilon(x, \cdot)], \quad (3.3)$$

für einen Hysterese-Operator mit gedächtnisfreiem Anfangswert $\mathcal{H} : C([0, T]) \rightarrow C([0, T])$.

Zu den Zustandsgleichungen (3.1) - (3.3) betrachten wir die Anfangsbedingungen

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3.4)$$

$$\varepsilon(x, 0) = \varepsilon_0(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3.5)$$

$$\sigma(x, 0) = \mathcal{H}[\varepsilon(x, \cdot)](0), \quad x \in [0, 1], \quad (3.6)$$

sowie eine der drei Randbedingungen

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.7)$$

$$\sigma(0, t) = \sigma(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.8)$$

$$v(0, t) = \sigma(1, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3.9)$$

Der Stab ist im Falle von Randbedingung (3.7) an beiden Enden eingespannt und im Falle von Randbedingung (3.8) an beiden Enden spannungsfrei. Im Falle von Randbedingung (3.9) ist er am linken Ende eingespannt und am rechten spannungsfrei.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} V &:= W^{1,\infty}(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^\infty(0, T; W^{1,2}(0, 1)), \\ W &:= W^{1,\infty}(0, T; L^2(0, 1)). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Zur Definition der Funktionenräume verweisen wir auf Kapitel A.

Nach Lemma A.0.17 ist W stetig eingebettet in den Banach-Raum $L^2(0, 1; C([0, T]))$. Die Zeitfunktion $\varepsilon \in W$, die jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ eine Funktion $\varepsilon(\cdot, t) \in L^2(0, 1)$

zuordnet, kann also mit einer Ortsfunktion aus $L^2(0, 1; C([0, T]))$, die fast jedem Ortspunkt $x \in (0, 1)$ eine Funktion $\varepsilon(x, \cdot) \in C([0, T])$ zuordnet, identifiziert werden. Es ist also $\varepsilon(x, \cdot) \in \text{Dom}(\mathcal{H})$ für fast jedes $x \in (0, 1)$.

Problemstellung:

Seien $v_0, \varepsilon_0 \in W^{1,2}(0, 1)$ und $g \in W^{1,2}(0, T; L^2(0, 1))$ gegeben. Gesucht ist ein Tripel $(v, \sigma, \varepsilon) \in V \times V \times W$, so daß (3.1) - (3.3) fast überall in $(0, 1) \times (0, T)$ gelten, die Anfangsbedingungen (3.4) - (3.6) erfüllt sind und ferner eine der folgenden Bedingungen gilt:

- Problem (P_A) : Randbedingung (3.7) und $v_0(0) = v_0(1) = 0$,
- Problem (P_B) : Randbedingung (3.8) und $\varepsilon_0(0) = \varepsilon_0(1) = 0$,
- Problem (P_C) : Randbedingung (3.9) und $v_0(0) = \varepsilon_0(1) = 0$.

Bemerkung 3.1.1 Ist (v, ε, σ) eine Lösung von Problem (P_A) , (P_B) bzw. (P_C) zum Anfangswert (v_0, ε_0) und definieren wir $u(x, t) := \int_0^t v(x, \tau) d\tau + u_0(x)$ und $u_0(x) := \int_0^x \varepsilon_0(\xi) d\xi$, so erfüllt (u, σ) die Gleichungen

$$u_{tt} - \sigma_x = g, \quad (3.11)$$

$$\sigma(x, \cdot) = \mathcal{H}[u_x(x, \cdot)] \quad \text{für fast jedes } x \in (0, 1), \quad (3.12)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x), \quad (3.13)$$

sowie den Randbedingungen

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [0, T] \text{ im Fall von Problem } (P_A), \quad (3.14)$$

$$\sigma(0, t) = 0, \quad \sigma(1, t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [0, T] \text{ im Fall von Problem } (P_B), \quad (3.15)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \sigma(1, t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [0, T] \text{ im Fall von Problem } (P_C), \quad (3.16)$$

wobei im Fall von Problem (P_A) zusätzlich $\int_0^1 \varepsilon_0(\xi) d\xi = 0$ gefordert werden muß.

Resultate zur Wellengleichung mit Hysterese

Anfangsrandwertaufgaben für die Wellengleichung mit hysteretischem Spannungs-Verzerrungs-Gesetz wie in (3.3) sind bereits in einer Reihe von Arbeiten behandelt worden. Im folgenden werden Ergebnisse dieser Untersuchungen vorgestellt.

(a) In [K86] wird die Existenz von ω -periodischen Lösungen für die eindimensionale quasilineare Wellengleichung

$$u_{tt}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}[u_x(x, \cdot)](t) = g(x, t), \quad g \text{ } \omega\text{-periodisch}, \quad \omega > 0,$$

mit homogenen Neumann-Randbedingungen

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0,$$

bewiesen, wobei \mathcal{P} ein Prandtl-Ishlinskii-Operator ist, der durch eine wachsende, konkave Erstbelastungskurve $\Psi_e \in C^2(\mathbb{R}_{>0})$, die einer Wachstumsbeschränkung genügt, definiert wird.

(b) In [BS96, Th. 3.5.3] wird die eindimensionale Wellengleichung mit Hysterese auf $(0, L) \times (0, T)$ für eine verschwindende äußere Kraftdichte $g \equiv 0$ in der folgenden Form betrachtet:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \sigma, \\ \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma(x, \cdot) &= \mathcal{W}[\psi_{-1}(x); \varepsilon(x, \cdot)], \quad x \in (0, L). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Es werden die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x) \in W^{2,2}(0, L) \quad \text{und} \quad z(x, 0) = z_0(x) \tag{3.18}$$

und die Randbedingungen

$$u(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad z(L, t) = 0, \quad t \in (0, T), \tag{3.19}$$

vorausgesetzt. Dabei ist, für ein abgeschlossenes Intervall I , wobei 0 ein innerer Punkt von I ist,

$$\mathcal{W} : \Psi_0 \times C_I([0, T]) \rightarrow C([0, T])$$

ein Hysterese-Operator vom Preisach-Typ (vgl. [BS96, Def. 2.4.2]), wobei der Parameterraum $Y = \Psi_0$ definiert ist durch

$$\begin{aligned} \Psi_0 := \{ \psi : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} : |\psi(r) - \psi(s)| \leq |r - s| \text{ für alle } r, s > 0 \\ \text{und der Träger } \text{supp}(\psi) \text{ ist endlich} \} \end{aligned}$$

und

$$C_I([0, T]) := \{ \varepsilon \in C([0, T]) : \varepsilon([0, T]) \subset I \}.$$

\mathcal{W} hat die folgenden Eigenschaften:

- (i) Für jedes $\psi_{-1} \in \Psi_0$ ist $\mathcal{W}[\psi_{-1}; \cdot]$ lokal Lipschitz-stetig, stückweise C^2 , hat lineares Wachstum und es gilt:

$$\mathcal{W}[\psi_{-1}; W_I^{1,1}(0, T)] \subset W^{1,1}(0, T),$$

wobei $W_I^{1,1}(0, T) := W^{1,1}(0, T) \cap C_I([0, T])$ ist.

- (ii) Die Zweige von $\mathcal{W}[\psi_{-1}; \cdot]$ sind für jedes $\psi_{-1} \in \Psi_0$ streng wachsend. Es gibt Konstanten $0 < c_0 < c_1$, so daß für alle $\varepsilon \in W_I^{1,1}(0, T)$ gilt:

$$c_0 |\varepsilon'(t)| \leq \left| \frac{d}{dt} \mathcal{W}[\psi_{-1}; \varepsilon](t) \right| \leq c_1 |\varepsilon'(t)|.$$

- (iii) Für jedes $\psi_{-1} \in \Psi_0$, $t \in [0, T)$ und $v \in C_I([0, t])$ ist der Zweig $\Phi_{v, \psi_{-1}}$ von \mathcal{W} im Intervall $(-\infty, v(t)] \cap I$ eine konvexe und im Intervall $[v(t), \infty) \cap I$ eine konkave Funktion.
- (iv) Der inverse Operator $(\mathcal{W}[\psi_{-1}; \cdot])^{-1}$, $\psi_{-1} \in \Psi_0$, existiert und ist stetig und hängt stetig vom Anfangswert ψ_{-1} ab.
- (v) Die Funktion der Anfangswerte $\psi_{-1} : [0, L] \rightarrow \Psi_0$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L_0 > 0$. Für $\varepsilon \equiv 0$ gilt die Kompatibilitätsbedingung $\mathcal{W}[\psi_{-1}(L); \varepsilon] \equiv 0$. Außerdem liegt $(\mathcal{W}[\psi_{-1}(x); \varepsilon])^{-1}(t)$ für jedes $t \in [0, T]$ im Inneren des Intervalls I .

Ist entweder $I = \mathbb{R}$ oder sind $\|u_0\|_{W^{2,2}(0,L)}$ und L_0 hinreichend klein, dann hat das Problem (3.17) - (3.19) eine Lösung (u, σ, ε) mit

$$u_{tt}, u_{xt}, z_{tt}, z_{xt}, z_{xx} \in L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \\ \sigma, \varepsilon \in C([0, L] \times [0, T]).$$

Für $I = \mathbb{R}$ erfüllen die Prandtl-Ishlinskii-Operatoren mit konkaver Erstbelastungskurve $\Psi_e \in W^{2,1}(\mathbb{R}_{>0})$, Ψ_e stückweise C^2 und $\Psi'_e(\infty) > 0$ alle geforderten Voraussetzungen. Für diese wird in [BS96, Th.3.5.7] auch die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen.

(c) In [K96, Th. III.1.2] wird die folgende schwache Formulierung der mehrdimensionalen Wellengleichung mit Hysterese auf der offenen und beschränkten Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, mit glattem Rand untersucht:

$$\int_{\Omega} [\langle u_{tt}(x, t) - g(x, t), w(x) \rangle + \langle f[x, Du(x, \cdot)](t), Dw(x) \rangle_{\mathbb{T}}] dx = 0 \quad (3.20) \\ \text{für fast alle } t \in (0, T) \quad \text{für alle } w \in W_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

Dabei bezeichnet $(\mathbb{T}, \|\cdot\|_{\mathbb{T}})$ den normierten linearen Raum der symmetrischen $N \times N$ Tensoren mit der vom Skalarprodukt

$$\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{T}} := \sum_{i,j=1}^N \xi_{ij} \eta_{ij}$$

induzierten Norm

$$\|\xi\|_{\mathbb{T}} := \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{T}}^{1/2}.$$

Das Symbol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird für das gewöhnliche Skalarprodukt $\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^N u^i v^i$ in \mathbb{R}^N benutzt, $D : W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\Omega; \mathbb{T})$ ist der durch den folgenden Ausdruck gegebene Differential-Operator

$$(Du)_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right), \quad i, j \in \{1, \dots, N\},$$

und $f[x, \cdot] : W^{1,2}(0, T; \mathbb{T}) \rightarrow W^{1,2}(0, T; \mathbb{T})$ ist für jedes $x \in \Omega$ ein Volterra-Operator. Für eine äußere Kraftdichte $g \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^N))$, die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x) \in W^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap W_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^N) \text{ und } u_t(x, 0) = u_1(x) \in W_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^N)$$

und die homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(x, t) = 0 \quad \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T)$$

wird die Existenz einer eindeutigen Lösung u von (3.20), $u \in L^\infty(0, T; W_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^N))$, mit

$$u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)) \quad \text{und} \quad Du_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{T}))$$

bewiesen, falls der Operator f die folgenden Bedingungen erfüllt:

Es gibt Konstanten $a, b, c > 0$ und einen Volterra-Operator

$$\mathcal{V} : \overline{\Omega} \times (W^{1,2}(0, T; \mathbb{T}))^2 \rightarrow W^{1,1}(0, T),$$

so daß für jedes $(x, y, \varepsilon, \vartheta) \in \Omega \times \Omega \times (W^{1,2}(0, T; \mathbb{T}))^2$ gilt

- (i) $\|(f[x, \varepsilon])_t(t)\|_{\mathbb{T}} \leq b\|\varepsilon_t(t)\|_{\mathbb{T}} \quad \text{f. ü.},$
- (ii) $\|f[x, \varepsilon](T) - f[y, \vartheta](T)\|_{\mathbb{T}}^2 \leq c \left(|x - y|^2 + \|\varepsilon(0) - \vartheta(0)\|_{\mathbb{T}}^2 + \int_0^T \|\varepsilon_t(t) - \vartheta_t(t)\|_{\mathbb{T}}^2 dt \right),$
- (iii) $\int_0^T \langle (f[x, \varepsilon])_t, \varepsilon_{tt}(t) \rangle_{\mathbb{T}} dt \geq \frac{a}{2} \|\varepsilon_t(T)\|_{\mathbb{T}}^2 - \frac{b}{2} \|\varepsilon_t(0)\|_{\mathbb{T}}^2, \quad \text{für } \varepsilon \in W^{2,2}(0, T; \mathbb{T}),$
- (iv) $\langle f[x, \varepsilon](t) - f[x, \vartheta](t), \varepsilon_t(t) - \vartheta_t(t) \rangle_{\mathbb{T}} \geq \frac{d}{dt} \mathcal{V}[x, \varepsilon, \vartheta] \quad \text{f. ü.},$
- (v) $\mathcal{V}[x, \varepsilon, \vartheta](t) = \mathcal{V}[x, \vartheta, \varepsilon](t) \geq 0, \quad \mathcal{V}[x, \varepsilon, \varepsilon](t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [0, T],$
- (vi) $|\mathcal{V}[x, \varepsilon_1, \vartheta](0) - \mathcal{V}[x, \varepsilon_2, \vartheta](0)| \leq c \max\{\|\varepsilon_1(0)\|_{\mathbb{T}}, \|\varepsilon_2(0)\|_{\mathbb{T}}, \|\vartheta(0)\|_{\mathbb{T}}\} (|x - y| + \|\varepsilon_1(0) - \varepsilon_2(0)\|_{\mathbb{T}}).$

(d) In [K96, Th.III.1.6] werden die Gleichungen (3.1), (3.2) mit dem konstitutiven Gesetz

$$\varepsilon(x, \cdot) = \mathcal{G}[x, \sigma(x, \cdot)] \quad \text{für } x \in [0, 1] \tag{3.21}$$

verknüpft. Hierbei ist $\mathcal{G}[x, \cdot] : C([0, T]) \rightarrow C([0, T])$ für jedes $x \in [0, 1]$ ein Hysterese-Operator mit gedächtnisfreiem Anfangswert. Es werden die Randbedingungen

$$v(0, t) = \sigma(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \tag{3.22}$$

und die Anfangsbedingungen

$$v(x, 0) = v_0 \in W^{1,2}(0, 1) \quad \text{und} \quad \sigma(x, 0) = \sigma_0 \in W^{1,2}(0, 1), \tag{3.23}$$

wobei $v_0(0) = \sigma_0(1) = 0$ ist, angenommen.

Es wird vorausgesetzt, daß der Operator $\mathcal{G} : [0, 1] \times C([0, T]) \rightarrow C([0, T])$ stetig ist und die folgende Annahme erfüllt ist:

Es gibt positive Konstanten R, a_R, b_R , so daß zu jedem $x \in [0, 1]$ und $v \in C([0, t])$, $t \in [0, T]$, mit $\max_{\tau \in [0, t]} |v(\tau)| \leq R$, der Zweig $\Phi_v =: \zeta_v(x, \cdot)$ zum Hysterese-Operator $\mathcal{G}[x, \cdot]$ im Intervall $[-R, R]$ eine absolut stetige Funktion ist, wobei gilt

- (i) $\zeta_v|_{[0, 1] \times [-R, R]} \in C([0, 1] \times [-R, R]),$

- (ii) $a_R \leq \frac{\partial}{\partial z} \zeta_v(x, z) \leq b_R$ für fast jedes $z \in (-R, R)$,
- (iii) Der Zweig $\zeta_v(x, \cdot)$ ist konvex im Intervall $[v(t), R]$ und konkav im Intervall $[-R, v(t)]$.

Ist zusätzlich $g \in W^{1,1}(0, T; L^2(0, 1))$ und erfüllen die Daten die folgende Beschränktheitsbedingung

$$\int_0^1 \left(3g^2(x, 0) + 2|\sigma'_0(x)|^2 + \frac{1}{a_R} |v'_0(x)|^2 \right) dx + 4\|g_t\|_{L^1(0, T; L^2(0, 1))}^2 \leq \frac{R^2}{16}, \quad (3.24)$$

dann wird die Existenz von (mindestens) einer Lösung $(v, \sigma, \varepsilon) \in [C([0, 1] \times [0, T])]^3$, welche die Gleichungen (3.1), (3.2) und (3.21) für fast alle $(x, t) \in (0, 1) \times (0, T)$, sowie (3.22) und (3.23) erfüllt, mit $v_t, v_x, \sigma_t, \sigma_x, \varepsilon_t \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ und $\max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T} |\sigma(x, t)| \leq \frac{R}{2}$ bewiesen.

Ist die obige Annahme für jedes $R > 0$ und $a_R \geq a_0 > 0$ erfüllt, kann die Bedingung (3.24) entfallen.

3.2 Voraussetzungen

Hier findet sich eine Zusammenstellung der im folgenden benötigten Voraussetzungen. Da in diesem Abschnitt die Zweige von verschiedenen Hysterese-Operatoren \mathcal{H}^δ , $\delta \geq 0$, betrachtet werden, bezeichnen wir die Zweige von \mathcal{H}^δ zur Vergangenheit v zur Unterscheidbarkeit mit Φ_v^δ statt Φ_v .

Voraussetzung 1

- (i) Es existiert eine Familie von Hysterese-Operatoren \mathcal{H}^δ , $\delta \geq 0$, mit $\mathcal{H}^0 := \mathcal{H}$. Für jedes $\delta \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\delta : C([0, T]) &\rightarrow C([0, T]), \\ \mathcal{H}^\delta(W^{1,1}(0, T)) &\subset W^{1,1}(0, T). \end{aligned}$$

Für alle $\delta \geq 0$ gilt $\mathcal{H}^\delta[\varepsilon] \equiv 0$, falls $\varepsilon \equiv 0$ ist.

- (ii) Die Familie \mathcal{H}^δ , $\delta \geq 0$, ist gleichmäßig lokal stark monoton, d. h. es existiert ein $a > 0$, so daß für alle $\varepsilon \in W^{1,1}(0, T)$ und jedes $\delta \geq 0$ und für fast alle $t \in (0, T)$ gilt

$$(\mathcal{H}^\delta[\varepsilon])_t(t) \varepsilon_t(t) \geq a \varepsilon_t^2(t). \quad (3.25)$$

- (iii) Die Familie \mathcal{H}^δ , $\delta \geq 0$, ist gleichmäßig Lipschitz-stetig, d. h. es gibt ein $b > 0$, so daß für beliebige Funktionen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in C([0, T])$, für jedes $t \in [0, T]$ und jedes $\delta \geq 0$ gilt

$$|\mathcal{H}^\delta[\varepsilon_1] - \mathcal{H}^\delta[\varepsilon_2]|(t) \leq b \sup_{\tau \in [0, t]} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|(\tau). \quad (3.26)$$

- (iv) Für jedes $t \in [0, T)$, $v \in C([0, t])$ und $\delta \geq 0$ ist der Zweig Φ_v^δ des Hysterese-Operators \mathcal{H}^δ , zur Vergangenheit v im Intervall $[v(t), \infty)$ eine konkave und im Intervall $(-\infty, v(t)]$ eine konvexe Funktion.
- (v) Die Operatoren \mathcal{H}^δ , $\delta \geq 0$, approximieren den Operator \mathcal{H} im folgenden Sinne:
Es gibt eine Konstante $p > 0$, so daß für jedes $\delta \geq 0$ und $\varepsilon \in C([0, T])$ die folgende Fehlerabschätzung gilt:

$$\sup_{t \in [0, T]} |\mathcal{H}[\varepsilon] - \mathcal{H}^\delta[\varepsilon]|(t) \leq p \delta. \quad (3.27)$$

Voraussetzung 2

Es gilt folgende weitere Monotoniebedingung. Für jedes $\delta \geq 0$ gibt es einen stetigen Operator $\mathcal{V}^\delta : [W^{1,2}(0, T)]^2 \rightarrow W^{1,1}(0, T)$, so daß mit einer positiven Konstanten e für alle $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in W^{1,2}(0, T)$ und für alle $\delta \geq 0$ gilt:

- (i) $\frac{d}{dt} \mathcal{V}^\delta[\varepsilon_1, \varepsilon_2](t) \leq (\mathcal{H}^\delta[\varepsilon_1](t) - \mathcal{H}^\delta[\varepsilon_2](t)) ((\varepsilon_1)_t - (\varepsilon_2)_t)(t)$ für fast alle $t \in (0, T)$.
- (ii) $\mathcal{V}^\delta[\varepsilon_1, \varepsilon_2](t) = \mathcal{V}^\delta[\varepsilon_2, \varepsilon_1](t) \geq 0$, $\mathcal{V}^\delta[\varepsilon, \varepsilon](t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$.
- (iii) $|\mathcal{V}^\delta[\varepsilon_1, \varepsilon](0) - \mathcal{V}^\delta[\varepsilon_2, \varepsilon](0)| \leq e \max\{|\varepsilon_1(0)|, |\varepsilon_2(0)|, |\varepsilon(0)|\} |\varepsilon_1(0) - \varepsilon_2(0)|$.
- (iv) Es gibt positive Konstanten c, d , so daß gilt

$$\|\mathcal{V}^\delta[u, v]\|_{W^{1,1}(0, T)}^2 \leq c \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_{[W^{1,2}(0, T)]^2}^2 + d.$$

- (v) Wir definieren $\mathcal{V} := \mathcal{V}^0$.

Voraussetzung 2*

Der Operator \mathcal{H} ist invertierbar. Der inverse Operator

$$\mathcal{H}^{-1} : \mathcal{H}(C([0, T])) \rightarrow C([0, T])$$

ist Lipschitz-stetig, d. h. es gibt eine Konstante $S > 0$, so daß für beliebige Funktionen $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{H}(C([0, T]))$ und für jedes $t \in [0, T]$ gilt

$$|\mathcal{H}^{-1}[\sigma_1] - \mathcal{H}^{-1}[\sigma_2]|(t) \leq S \sup_{\tau \in [0, t]} |\sigma_1 - \sigma_2|(\tau).$$

Voraussetzung 3

Es gibt eine Konstante $L > 0$, so daß für den Operator $\mathcal{V} = \mathcal{V}^0$ aus Voraussetzung 2 für alle $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in W^{1,2}(0, T)$ und $t \in [0, T]$ gilt

$$(\mathcal{H}[\varepsilon_1] - \mathcal{H}[\varepsilon_2])^2(t) \leq 2L \mathcal{V}[\varepsilon_1, \varepsilon_2](t). \quad (3.29)$$

3.3 Beispiele

Beispiel 3.3.1 Die linearen Superpositions-Operatoren

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[\varepsilon] &:= a\varepsilon, \quad a > 0, \\ \mathcal{H}^\delta[\varepsilon] &:= \mathcal{H}[\varepsilon] \quad \text{für alle } \delta \geq 0,\end{aligned}$$

erfüllen offensichtlich die Voraussetzung 1 und für

$$\mathcal{V}^\delta[\varepsilon_1, \varepsilon_2](t) := \mathcal{V}[\varepsilon_1, \varepsilon_2](t) := \frac{a}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2, \quad \delta \geq 0,$$

die Voraussetzungen 2 und 3. Mit dem inversen Operator

$$\mathcal{H}^{-1} : \begin{cases} C([0, T]) & \rightarrow C([0, T]), \\ \sigma & \mapsto \frac{1}{a}\sigma, \end{cases}$$

wird auch Voraussetzung 2* erfüllt.

Bemerkung 3.3.2 Die Voraussetzung 1 (iv) ist für jeden nichtlinearen Superpositions-Operator verletzt. Um weitere Beispiele zu konstruieren, werden also „echte“ Hysterese-Operatoren benötigt.

Beispiel 3.3.3 Wir betrachten die Familie von Prandtl-Ishlinskii-Operatoren

$$\mathcal{P}^\delta[\varepsilon], \quad \delta \geq 0,$$

wobei $\mathcal{P}^0 = \mathcal{P}$ der durch die Verteilungsfunktion ν gegebene Prandtl-Ishlinskii-Operator aus der Definition 2.3.3 sei. Die Prandtl-Ishlinskii-Operatoren \mathcal{P}^δ , $\delta > 0$, seien entweder die durch (2.43) oder die durch (2.52) definierten Approximationen. Wegen Lemma 2.3.11 in Verbindung mit Lemma 2.6.9 sowie den Sätzen 2.6.5 und 2.6.6 erfüllt die Familie \mathcal{P}^δ , $\delta \geq 0$, die Voraussetzung 1 mit Ausnahme der lokal starken Monotonie-Bedingung. Statt dessen ist die Monotonie-Ungleichung (3.25) nur für $a = 0$ erfüllt.

Mit $\nu_0 := \nu$ erfüllt der Operator

$$\mathcal{V}^\delta[\varepsilon_1, \varepsilon_2](t) := \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathfrak{s}_r[\varepsilon_1] - \mathfrak{s}_r[\varepsilon_2])^2(t) d\nu_\delta(r), \quad \delta \geq 0,$$

die Voraussetzung 2. Dies folgt aus der zweiten Monotonie-Ungleichung des Stop-Operators (2.11) sowie den Abschätzungen (2.13) und (2.14) der Proposition 2.2.6, wenn zusätzlich die Monotonie der Verteilungsfunktion ν_δ berücksichtigt wird. Die Hölder-Ungleichung liefert die Gültigkeit von Voraussetzung 3.

Die Familie der Prandtl-Ishlinskii-Operatoren erfüllt also die Voraussetzung 1 nicht vollständig. Mit der folgenden Bemerkung 3.3.4 läßt sich eine abgewandelte Familie von Hysterese-Operatoren konstruieren, die die Voraussetzungen 1, 2 und 3 erfüllt. In der Bemerkung 6.2.4 werden wir dann von dem abgewandelten Problem auf das Problem mit Prandtl-Ishlinskii-Operator zurückschliessen.

Bemerkung 3.3.4 Erfüllen die Familien $(\mathcal{H}_i^\delta, \mathcal{V}_i^\delta, a_i)$, $\delta \geq 0$, mit positiven Konstanten $b_i, p_i, c_i, d_i, e_i, S_i$ und L_i , $i = 1, 2$, die Voraussetzungen 1, 2 und 3, wobei für die zweite Familie nur die schwächere Bedingung $a_2 \geq 0$ gefordert wird, dann existieren positive Konstanten b, p, c, d, e, S und L mit denen die Familie

$$(\alpha_1 \mathcal{H}_1^\delta + \alpha_2 \mathcal{H}_2^\delta, \alpha_1 \mathcal{V}_1^\delta + \alpha_2 \mathcal{V}_2^\delta, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2), \quad \delta \geq 0,$$

für $\alpha_1 > 0$ und $\alpha_2 \geq 0$ die Voraussetzungen 1, 2 und 3 erfüllt.

Beispiel 3.3.5 Für die Verteilungsfunktion ν gelte $\lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = 0$, $-\nu(0) \geq b$ und $-\nu(R) = a$ für positive Konstanten a, b und R . Dann erfüllt die Familie der „abgeschnittenen Prandtl-Ishlinskii-Operatoren“

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^0[\varepsilon](t) &:= \mathcal{H}[\varepsilon](t) := \int_0^R \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) d\nu(r) + \varepsilon(t) \int_R^\infty d\nu(r) \\ &= \int_0^R \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) d\nu(r) + a\varepsilon(t), \\ \mathcal{H}^\delta[\varepsilon](t) &:= \int_0^R \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) d\nu_\delta(r) + a\varepsilon(t), \quad \delta > 0, \end{aligned}$$

wobei ν_δ , $\delta > 0$, entweder die in Gleichung (2.42) oder die in Gleichung (2.51) definierte approximierte Verteilungsfunktion sei, die Voraussetzungen 1, 2 und 3. Da die Operatoren \mathcal{H}^δ , $\delta \geq 0$, sich als Summe eines Prandtl-Ishlinskii-Operators \mathcal{P}^δ , der durch die Verteilungsfunktion $\tilde{\nu}_\delta := \chi_{[0,R]} \nu_\delta$, $\nu_0 := \nu$, gegeben ist, mit einem linearen Superpositions-Operator schreiben lassen, folgt die Gültigkeit der Voraussetzungen 1, 2 und 3 aus der Bemerkung 3.3.4 sowie den Beispielen 3.3.1 und 3.3.3.

3.4 Diskretisierung

Wir wollen die Anfangsrandwertaufgaben, die durch die Probleme (P_A) , (P_B) und (P_C) gegeben sind, diskretisieren. Dazu betrachten wir für gegebene $N, M \in \mathbb{N}$ das uniforme Gitter

$$\{(x_l, t_m) : x_l := lk, t_m := mh, l = 0, \dots, N, m = -1, \dots, M\}$$

mit Zeitschrittweite $h := \frac{T}{M}$ und Ortsschrittweite $k := \frac{1}{N}$. Für das Verhältnis der Schrittweiten gelte

$$h < \frac{k}{2\sqrt{b}}, \tag{3.30}$$

wobei b die Lipschitz-Konstante aus Voraussetzung 1 ist.

Für gegebenes $\delta \geq 0$ bezeichnet $\tilde{\mathcal{H}}^\delta$, den zeitdiskreten Hysterese-Operator mit gedächtnisfreiem Anfangswert zu \mathcal{H}^δ und $\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta : S(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ die Endauswertung von $\tilde{\mathcal{H}}^\delta$.

Wir setzen die Funktion g auf $[0, 1] \times [-h, T]$ fort, indem wir für $x \in [0, 1]$ und $t \in [-h, 0)$

$$g(x, t) := g(x, 0)$$

setzen. Diese Funktion liegt in $g \in W^{1,2}(-h, T; L^2(0, 1))$.

Definition 3.4.1 Für $m = 0, \dots, M$, $l = 1, \dots, N$ definieren wir die Mittelwerte

$$g_m^l := \frac{1}{hk} \int_{(m-1)h}^{mh} \int_{(l-1)k}^{lk} g(x, t) dx dt. \quad (3.31)$$

Für $m = 0, \dots, M$, $l = 0, \dots, N$ sei $v_m^l \in \mathbb{R}$ ein Näherungswert für $v(x_l, t_m) = v(lk, mh)$. Wir definieren die Differenzen-Operatoren

$$\begin{aligned} D_h v_m^l &:= D_h^1 v_m^l := \frac{1}{h} (v_m^l - v_{m-1}^l), \\ D_k v_m^l &:= D_k^1 v_m^l := \frac{1}{k} (v_m^l - v_m^{l-1}), \\ D_k^n v_m^l &:= D_k^{n-1} (D_k v_m^l) \quad \text{für } n > 1, \\ D_h^n v_m^l &:= D_h^{n-1} (D_h v_m^l) \quad \text{für } n > 1. \end{aligned}$$

Wir betrachten das folgende **implizite Finite-Differenzen-Schema mit Gedächtnis**:
Gesucht sind reelle Zahlen

$$\begin{aligned} v_m^l, \quad m &= -1, \dots, M, \quad l = 1, \dots, N, \\ v_m^0, \quad m &= 0, \dots, M, \\ \varepsilon_m^l, \quad m &= -1, \dots, M, \quad l = 0, \dots, N-1, \\ \varepsilon_0^N, \\ \sigma_m^l, \quad m &= -1, \dots, M, \quad l = 0, \dots, N-1, \\ \sigma_m^N, \quad m &= 0, \dots, M, \end{aligned}$$

die das folgende Gleichungssystem erfüllen

$$\frac{v_m^l - v_{m-1}^l}{h} = \frac{\sigma_m^l - \sigma_m^{l-1}}{k} + g_m^l, \quad l = 1, \dots, N, \quad m = 0, \dots, M, \quad (3.32)$$

$$\frac{\varepsilon_m^l - \varepsilon_{m-1}^l}{h} = \frac{v_m^{l+1} - v_m^l}{k}, \quad l = 0, \dots, N-1, \quad m = 0, \dots, M, \quad (3.33)$$

$$\sigma_m^l = \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_m^l)), \quad l = 0, \dots, N-1, \quad m = -1, \dots, M, \quad (3.34)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$v_0^l = v_0(x_l), \quad l = 0, \dots, N, \quad (3.35)$$

$$\varepsilon_0^l = \varepsilon_0(x_l), \quad l = 0, \dots, N, \quad (3.36)$$

und einer der folgenden Randbedingungen

$$v_m^0 = v_m^N = 0, \quad m = -1, \dots, M, \quad (3.37)$$

$$\sigma_m^0 = \sigma_m^N = 0, \quad m = -1, \dots, M, \quad (3.38)$$

$$v_m^0 = \sigma_m^N = 0, \quad m = -1, \dots, M. \quad (3.39)$$

Bezeichnungen:

Die Gleichungen (3.32)-(3.36) mit Randbedingung (3.37) nennen wir Problem (D_A).

Die Gleichungen (3.32)-(3.36) mit Randbedingung (3.38) nennen wir Problem (D_B).

Die Gleichungen (3.32)-(3.36) mit Randbedingung (3.39) nennen wir Problem (D_C).

Lemma 3.4.2 *Sei die Voraussetzung 1 für die Familie der Hysterese-Operatoren \mathcal{H}^δ , $\delta \geq 0$, erfüllt. Dann übertragen sich die dort geforderten Eigenschaften in der folgenden Weise auf die Familie der Endauswertungen $\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta$, $\delta \geq 0$, der zugehörigen diskreten Hysterese-Operatoren $\tilde{\mathcal{H}}^\delta$.*

(i) Für jedes $v \in S(\mathbb{R}) \cup \emptyset$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((v, x, x)) = \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((v, x)),$$

und es ist $\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((0)) = 0$.

(ii) $\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta$ ist lokal stark monoton im folgenden Sinne:

Für alle $\delta \geq 0$, $v \in S(\mathbb{R}) \cup \emptyset$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt mit der in Voraussetzung 1 definierten Monotonie-Konstante a

$$\left(\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((v, x, y)) - \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((v, x)) \right) (y - x) \geq a(y - x)^2. \quad (3.40)$$

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\delta \geq 0$ ist $\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta|_{\mathbb{R}^n}$ Lipschitz-stetig bezüglich der Maximumsnorm mit der in Voraussetzung 1 definierten Lipschitz-Konstante b , d. h. für alle $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$, $y = (y_0, \dots, y_{n-1}) \in S(\mathbb{R})$ gilt

$$\left| \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta(x) - \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta(y) \right| \leq b \max_{i \in \{0, \dots, n-1\}} |x_i - y_i|.$$

(iv) Für jede endliche Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{m+1}) \in S(\mathbb{R})$, $m \geq 1$, für die $\varepsilon_{m-1} < \varepsilon_m < \varepsilon_{m+1}$ oder $\varepsilon_{m-1} > \varepsilon_m > \varepsilon_{m+1}$ ist, gilt für jedes $\delta \geq 0$

$$\frac{\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_m)) - \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{m-1}))}{\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1}} \geq \frac{\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{m+1})) - \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_m))}{\varepsilon_{m+1} - \varepsilon_m}.$$

Beweis:

zu (i): Dies folgt direkt aus der diskreten Ratenunabhängigkeit nach Lemma 2.4.8 und Voraussetzung 1.

zu (ii): Sei $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$ eine Input-Folge, $n \geq 1$. Sei ε die stückweise affine Interpolierende mit

$$\varepsilon(t_i) = \varepsilon_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad t_i = \frac{i}{n}T.$$

Sei $\sigma_i := \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_i)) = \mathcal{H}^\delta[\varepsilon](t_i)$, $i = 0, \dots, n$, und $\sigma(t) := \mathcal{H}^\delta[\varepsilon](t)$, $t \in [0, T]$.

Ist $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$, dann ist die starke Monotonie-Ungleichung

$$(\sigma_n - \sigma_{n-1})(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) \geq a(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})^2 \quad (3.41)$$

für jedes $a > 0$ erfüllt.

Sei nun $\varepsilon_{n-1} \neq \varepsilon_n$. Wir betrachten das Intervall I

$$I := (\min\{\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}\}, \max\{\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}\}).$$

Da ε auf dem Intervall (t_{n-1}, t_n) affin ist, vermittelt die Funktion $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon|_{(t_{n-1}, t_n)}$ einen C^1 -Diffeomorphismus zwischen diesem Intervall und I . Die Ratenunabhängigkeit von \mathcal{H}^δ liefert nach Lemma 2.1.5 die Existenz einer Funktion $w : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\sigma(t) = \mathcal{H}^\delta[\varepsilon](t) = w(\varepsilon(t)) \quad \text{für alle } t \in \bar{I}.$$

Für $\xi \in I$ gilt

$$\sigma \circ \tilde{\varepsilon}^{-1}(\xi) = \sigma(\tilde{\varepsilon}^{-1}(\xi)) = w(\xi).$$

Aus der Glattheit von $\tilde{\varepsilon}$, und da $\sigma \in W^{1,1}(0, T)$ ist wegen Voraussetzung 1, folgt, daß auch $w = \sigma \circ \tilde{\varepsilon}^{-1} \in W^{1,1}(I)$ ist und die schwache Ableitung von w mit der Kettenregel berechnet werden kann (vgl. [Alt92, 2.15]):

$$w'(\xi) = \sigma'(\tilde{\varepsilon}^{-1}(\xi)) [\tilde{\varepsilon}'(\tilde{\varepsilon}^{-1}(\xi))]^{-1} = \frac{\sigma_t(t)}{\tilde{\varepsilon}_t(t)} = \frac{(\mathcal{H}^\delta[\varepsilon])_t(t)}{\varepsilon_t(t)} \quad \text{für alle } \xi \in I.$$

Wegen der in (3.25) vorausgesetzten starken Monotonie folgt für fast alle $\xi \in I$

$$w'(\xi) \geq a.$$

Falls $\varepsilon_{n-1} < \varepsilon_n$ ist, gilt

$$\sigma_n - \sigma_{n-1} = \sigma(t_n) - \sigma(t_{n-1}) = w(\varepsilon_n) - w(\varepsilon_{n-1}) = \int_{\varepsilon_{n-1}}^{\varepsilon_n} w'(\xi) d\xi \geq a(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}).$$

Falls $\varepsilon_{n-1} > \varepsilon_n$ ist, folgt entsprechend

$$\sigma_{n-1} - \sigma_n \geq a(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n).$$

In beiden Fällen folgt daraus Ungleichung (3.41).

Setzen wir $v := (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-2})$ für $n > 1$ bzw. $v := \emptyset$ für $n = 1$, sowie $x := \varepsilon_{n-1}$, $y := \varepsilon_n$, so folgt aus (3.41) die lokal starke Monotonie (3.40) des diskreten Hysterese-Operators $\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta$.

zu (iii): Die Aussage folgt sofort aus der gleichmäßigen Lipschitz-Stetigkeit der Familie der (kontinuierlichen) Hysterese-Operatoren nach Ungleichung (3.26). Seien u bzw. v die stetigen, stückweise affinen Interpolierenden von x bzw. y gemäß Definition 2.4.3. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta(x) - \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta(y) \right| &= \left| \mathcal{H}^\delta[u](T) - \mathcal{H}^\delta[v](T) \right| \\ &\leq b \sup_{\tau \in [0, T]} |u - v|(\tau) = b \max_{i \in \{0, \dots, n-1\}} |x_i - y_i|. \end{aligned}$$

zu (iv): Sei ε die stetige, stückweise affine Interpolierende von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{m+1})$. Für $t_i := \frac{i}{m+1}T$, $i = 0, \dots, m+1$, ist dann $\varepsilon(t_i) = \varepsilon_i$.

Sei $I := (\min\{\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_{m+1}\}, \max\{\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_{m+1}\})$. Da ε streng monoton in (t_{m-1}, t_{m+1}) ist, existiert nach Lemma 2.1.5 eine Funktion $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, der Zweig des Hysterese-Operators \mathcal{H}^δ zur Vergangenheit $\varepsilon_{[0, t_{m-1}]}$ mit $\mathcal{H}^\delta[\varepsilon](t) = w(\varepsilon(t))$ für alle $t \in \bar{I}$. Mit derselben

Begründung wie im Beweis von (ii) ist w in den Intervallen $(\min\{\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i\}, \max\{\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i\})$, $i \in \{m, m+1\}$, absolut stetig. Da w außerdem stetig in ε_m ist, ist $w|_I \in W^{1,1}(I)$. Weil w nach Voraussetzung im Intervall $(\varepsilon_{m-1}, \infty)$ konkav und im Intervall $(-\infty, \varepsilon_{m-1})$ konvex ist, gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_m)) - \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{m-1}))}{\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1}} = \frac{\mathcal{H}^\delta[\varepsilon](t_m) - \mathcal{H}^\delta[\varepsilon](t_{m-1})}{\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1}} \\
&= \frac{w(\varepsilon_m) - w(\varepsilon_{m-1})}{\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1}} = \frac{\int_{\varepsilon_{m-1}}^{\varepsilon_m} w'(\xi) d\xi}{\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1}} \geq w(\varepsilon_m) \\
&\geq \frac{\int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_{m+1}} w'(\xi) d\xi}{\varepsilon_{m+1} - \varepsilon_m} = \frac{w(\varepsilon_{m+1}) - w(\varepsilon_m)}{\varepsilon_{m+1} - \varepsilon_m} = \frac{\mathcal{H}^\delta[\varepsilon](t_{m+1}) - \mathcal{H}^\delta[\varepsilon](t_m)}{\varepsilon_{m+1} - \varepsilon_m} \\
&= \frac{\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{m+1})) - \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_m))}{\varepsilon_{m+1} - \varepsilon_m}. \tag{3.42}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.4.3 Aus Lemma 3.4.2 und der Randbedingung (3.38) folgt

$$0 = (\sigma_m^0 - \sigma_{m-1}^0) (\varepsilon_m^0 - \varepsilon_{m-1}^0) \geq a (\varepsilon_m^0 - \varepsilon_{m-1}^0)^2.$$

Also gilt $\varepsilon_m^0 = \varepsilon_{m-1}^0$, $m = 0, \dots, M$. Soweit das Problem (P_B) bzw. die zugehörige Diskretisierung (D_B) behandelt wird, gilt $\varepsilon_0^0 = \varepsilon_0(0) = 0$ wegen der Anfangsbedingung (3.36). Also ist

$$\varepsilon_m^0 = 0 \quad \text{für alle } m = -1, \dots, M.$$

Kapitel 4

Existenz und Eindeutigkeit der numerischen Lösung

In diesem Kapitel wird die eindeutige Lösbarkeit des im Abschnitt 3.4 eingeführten Finite-Differenzen-Schemas für alle drei betrachteten Fälle von Randbedingungen gezeigt, d. h. für die Probleme (D_A) , (D_B) und (D_C) , soweit die Zeitschrittweite h im Verhältnis zur Ortsschrittweite k hinreichend klein ist. Die Bedingung an das Schrittweitenverhältnis sorgt dafür, daß zumindest im Fall von Prandtl-Ishlinskii-Operatoren als Hysterese-Nichtlinearitäten das Abhängigkeitsgebiet des diskreten Systems im Abhängigkeitsgebiet des kontinuierlichen Systems enthalten, d. h. die Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung erfüllt ist.

Wir führen den Beweis mittels Induktion über die Zeitschichten. Dazu zeigen wir in Lemma 4.0.2, daß bei gegebenen Lösungen zu den Zeitschichten $-1, 0, 1, \dots, m-1$ eine eindeutige Lösung zur Zeitschicht m existiert, falls alle Funktionen $\hat{\Phi}_{m,l}^\delta$, welche die Zweige des diskreten Hysterese-Operators $\tilde{\mathcal{H}}^\delta$ zur Vergangenheit $(\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_{m-1}^l)$ darstellen, Lipschitz-stetige Funktionen mit einheitlicher Lipschitz-Konstante $L > 0$ sind und eine Schrittweitenbedingung erfüllt ist, wie es die folgende Voraussetzung 4.0.1 fordert. Ist Voraussetzung 1 aus Abschnitt 3.2 erfüllt, dann folgt aus Lemma 3.4.2 die Lipschitz-Stetigkeit aller Zweige des Hysterese-Operators $\tilde{\mathcal{H}}^\delta$ mit einheitlicher Lipschitz-Konstante $L = b$.

Voraussetzung 4.0.1

- Für alle $\delta \geq 0$, $m \in \{1, \dots, M\}$ und $l \in \{0, \dots, N-1\}$ sei die Funktion $\hat{\Phi}_{m,l}^\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L > 0$, d. h. es gelte für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$|\hat{\Phi}_{m,l}^\delta(x) - \hat{\Phi}_{m,l}^\delta(y)| \leq L|x - y|.$$

- Für das Verhältnis der Schrittweiten gelte

$$h < \frac{k}{2\sqrt{L}}.$$

Lemma 4.0.2 *Es sei die Voraussetzung 4.0.1 erfüllt. Es sei $m \in \{1, \dots, M\}$.*

(i) *Seien $v_{m-1} := (v_{m-1}^l)_{l=1, \dots, N-1} \in \mathbb{R}^{N-1}$, $\varepsilon_{m-1} := (\varepsilon_{m-1}^l)_{l=0, \dots, N-1} \in \mathbb{R}^N$ und $g_m := (g_m^l)_{l=1, \dots, N-1} \in \mathbb{R}^{N-1}$ gegeben. Dann hat das Gleichungssystem*

$$v_m^0 = v_m^N = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{v_m^l - v_{m-1}^l}{h} = \frac{\sigma_m^l - \sigma_m^{l-1}}{k} + g_m^l, \quad l = 1, \dots, N-1, \quad (4.2)$$

$$\frac{\varepsilon_m^l - \varepsilon_{m-1}^l}{h} = \frac{v_m^{l+1} - v_m^l}{k}, \quad l = 0, \dots, N-1, \quad (4.3)$$

$$\sigma_m^l = \hat{\Phi}_{m,l}^\delta(\varepsilon_m^l), \quad l = 0, \dots, N-1, \quad (4.4)$$

genau eine Lösung $(v_m, \sigma_m, \varepsilon_m)$, $v_m := (v_m^l)_{l=1, \dots, N-1} \in \mathbb{R}^{N-1}$, $\sigma_m := (\sigma_m^l)_{l=0, \dots, N-1} \in \mathbb{R}^N$ und $\varepsilon_m := (\varepsilon_m^l)_{l=0, \dots, N-1} \in \mathbb{R}^N$.

(ii) *Seien $v_{m-1} := (v_{m-1}^l)_{l=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon_{m-1} := (\varepsilon_{m-1}^l)_{l=1, \dots, N-1} \in \mathbb{R}^{N-1}$ und $g_m := (g_m^l)_{l=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^N$ gegeben. Dann hat das Gleichungssystem*

$$\sigma_m^0 = \sigma_m^N = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{v_m^l - v_{m-1}^l}{h} = \frac{\sigma_m^l - \sigma_m^{l-1}}{k} + g_m^l, \quad l = 1, \dots, N, \quad (4.6)$$

$$\frac{\varepsilon_m^l - \varepsilon_{m-1}^l}{h} = \frac{v_m^{l+1} - v_m^l}{k}, \quad l = 1, \dots, N-1, \quad (4.7)$$

$$\sigma_m^l = \hat{\Phi}_{m,l}^\delta(\varepsilon_m^l), \quad l = 1, \dots, N-1, \quad (4.8)$$

genau eine Lösung $(v_m, \sigma_m, \varepsilon_m)$, $v_m := (v_m^l)_{l=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^N$, $\sigma_m := (\sigma_m^l)_{l=1, \dots, N-1} \in \mathbb{R}^{N-1}$ und $\varepsilon_m := (\varepsilon_m^l)_{l=1, \dots, N-1} \in \mathbb{R}^{N-1}$.

(iii) *Seien $v_{m-1} := (v_{m-1}^l)_{l=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon_{m-1} := (\varepsilon_{m-1}^l)_{l=0, \dots, N-1} \in \mathbb{R}^N$ und $g_m := (g_m^l)_{l=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^N$ gegeben. Dann hat das Gleichungssystem*

$$v_m^0 = \sigma_m^N = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{v_m^l - v_{m-1}^l}{h} = \frac{\sigma_m^l - \sigma_m^{l-1}}{k} + g_m^l, \quad l = 1, \dots, N, \quad (4.10)$$

$$\frac{\varepsilon_m^l - \varepsilon_{m-1}^l}{h} = \frac{v_m^{l+1} - v_m^l}{k}, \quad l = 0, \dots, N-1, \quad (4.11)$$

$$\sigma_m^l = \hat{\Phi}_{m,l}^\delta(\varepsilon_m^l), \quad l = 0, \dots, N-1, \quad (4.12)$$

genau eine Lösung $(v_m, \sigma_m, \varepsilon_m)$, $v_m := (v_m^l)_{l=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^N$, $\sigma_m := (\sigma_m^l)_{l=0, \dots, N-1} \in \mathbb{R}^N$ und $\varepsilon_m := (\varepsilon_m^l)_{l=0, \dots, N-1} \in \mathbb{R}^N$.

Im Beweis von Lemma 4.0.2 werden die im folgenden definierten Matrizen verwendet.

Definition 4.0.3 Die Matrix $C_{N,M} = (c_{i,j})_{i=1, \dots, N, j=1, \dots, M} \in \mathbb{R}^{N \times M}$ sei definiert durch

$$c_{i,j} := \begin{cases} -1, & \text{falls } j = i, \\ 1, & \text{falls } j = i + 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $C_N := C_{N,N}$ und $C_{N,M}^T$ die transponierte Matrix von $C_{N,M}$.

Bemerkung 4.0.4 Seien $N, M \geq 2$. Für die Standardmatrixnormen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ gilt

$$\|C_{N,M}\|_1 = \|C_{N,M}\|_\infty = \|C_{N,M}^T\|_1 = \|C_{N,M}^T\|_\infty = 2$$

und

$$\|C_{N,M}\|_2, \|C_{N,M}^T\|_2 \leq 2.$$

Im folgenden Beweis sei $\|\cdot\| := \|\cdot\|_p$ für ein $p \in \{1, 2, \infty\}$.

Beweis von Lemma 4.0.2:

zu (i):

Sei $\hat{\Phi}_m^\delta(\varepsilon_m) := \left(\hat{\Phi}_{m,l}^\delta(\varepsilon_m^l) \right)_{l=0,\dots,N-1}$. Mit Hilfe der oben definierten Matrizen läßt sich das Gleichungssystem (4.1)-(4.4) in folgender Fixpunktform formulieren:

$$v_m = v_{m-1} + \frac{h}{k} C_{N-1,N} \sigma_m + h g_m, \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{m-1} - \frac{h}{k} C_{N-1,N}^T v_m, \quad (4.14)$$

$$\sigma_m = \hat{\Phi}_m^\delta(\varepsilon_m). \quad (4.15)$$

Substituieren wir ε_m in (4.15) durch (4.14) und ersetzen σ_m in (4.13) durch (4.15), so ist (4.13) eine Fixpunkt-Gleichung der Form

$$v_m = G^m(v_m)$$

mit

$$G^m(x) = v_{m-1} + \frac{h}{k} C_{N-1,N} \hat{\Phi}_m^\delta(\varepsilon_{m-1} - \frac{h}{k} C_{N-1,N}^T x).$$

Unter Berücksichtigung der Voraussetzungen 4.0.1 ist G^m auf \mathbb{R}^{N-1} eine Kontraktion, da für beliebige $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{N-1}$ gilt

$$\begin{aligned} \|G^m(v_1) - G^m(v_2)\| &= \left\| \frac{h}{k} C_{N-1,N} (\sigma_1 - \sigma_2) \right\| \leq \frac{h}{k} \|C_{N-1,N}\| \|\sigma_1 - \sigma_2\| \\ &\leq \frac{h}{k} L \|C_{N-1,N}\| \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \leq \frac{h^2}{k^2} L \|C_{N-1,N}\| \|C_{N-1,N}^T\| \|v_1 - v_2\| \\ &=: q \|v_1 - v_2\|. \end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzungen an die Zeitschrittweite h ist $q < 1$ und damit G^m eine Kontraktion. Mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes folgt die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems (4.1)-(4.4).

zu (ii):

Sei $\hat{\Phi}_m^\delta(\varepsilon_m) := \left(\hat{\Phi}_{m,l}^\delta(\varepsilon_m^l) \right)_{l=1,\dots,N-1}$. Mit Hilfe der oben definierten Matrizen läßt sich

das Gleichungssystem (4.5)-(4.8) in folgender Fixpunktform formulieren:

$$v_m = v_{m-1} - \frac{h}{k} C_{N-1,N}^T \sigma_m + h g_m, \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{m-1} + \frac{h}{k} C_{N-1,N+1} v_m, \quad (4.17)$$

$$\sigma_m = \hat{\Phi}_m^\delta(\varepsilon_m). \quad (4.18)$$

Durch dieselbe Substitution wie unter (i) ergibt sich die Fixpunkt-Gleichung

$$v_m = G^m(v_m)$$

mit

$$G^m(x) = v_{m-1} - \frac{h}{k} C_{N-1,N}^T \hat{\Phi}_m^\delta(\varepsilon_{m-1} + \frac{h}{k} C_{N-1,N+1} x)$$

und die Abschätzung

$$\|G^m(v_1) - G^m(v_2)\| \leq \frac{h^2}{k^2} L \|C_{N-1,N}^T\| \|C_{N-1,N+1}\| \|v_1 - v_2\| =: q \|v_1 - v_2\|$$

für alle $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^N$.

Aus der Voraussetzung 4.0.1 folgt, daß G^m eine Kontraktion auf \mathbb{R}^N ist. Damit ist das Gleichungssystem (4.5)-(4.8) eindeutig lösbar.

zu (iii):

Sei $\hat{\Phi}_m^\delta(\varepsilon_m) := \left(\hat{\Phi}_{m,l}^\delta(\varepsilon_m^l) \right)_{l=0,\dots,N-1}$. Mit Hilfe der oben definierten Matrizen läßt sich das Gleichungssystem (4.9)-(4.12) in folgender Fixpunktform formulieren:

$$v_m = v_{m-1} + \frac{h}{k} C_N \sigma_m + h g_m, \quad (4.19)$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{m-1} - \frac{h}{k} C_N^T v_m, \quad (4.20)$$

$$\sigma_m = \hat{\Phi}_m^\delta(\varepsilon_m). \quad (4.21)$$

Durch dieselbe Substitution wie unter (i) ergibt sich die Fixpunkt-Gleichung

$$v_m = G^m(v_m)$$

mit

$$G^m(x) = v_{m-1} + \frac{h}{k} C_N \hat{\Phi}_m^\delta(\varepsilon_{m-1} - \frac{h}{k} C_N^T x)$$

und die Abschätzung

$$\|G^m(v_1) - G^m(v_2)\| \leq \frac{h^2}{k^2} L \|C_N\| \|C_N^T\| \|v_1 - v_2\| =: q \|v_1 - v_2\| \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in \mathbb{R}^N.$$

Aus der Voraussetzung 4.0.1 folgt, daß G^m eine Kontraktion auf \mathbb{R}^N ist. Damit ist das Gleichungssystem (4.9)-(4.12) eindeutig lösbar. \square

Satz 4.0.5 *Es sei die Voraussetzung 1 aus dem Abschnitt 3.2 erfüllt. Für das Verhältnis der Schrittweiten gelte $h < \frac{k}{2\sqrt{b}}$ mit der in der Voraussetzung 1 definierten Konstanten b . Dann haben die Probleme (D_A) , (D_B) und (D_C) jeweils eine eindeutige Lösung.*

Beweis:

Die eindeutige Existenz einer Lösung wird mittels Induktion über die Zeitschritte nachgewiesen.

Induktionsanfang:

Aus den Anfangsbedingungen (3.35), (3.36) den jeweiligen Randbedingungen (3.37) bzw. (3.38) bzw. (3.39) und den Gleichungen (3.32)-(3.34) ergeben sich die eindeutigen Lösungen $\varepsilon_0^l, v_0^l, l = 0, \dots, N$ und $\varepsilon_{-1}^l, l = 0, \dots, N-1, \sigma_{-1}^l, l = 0, \dots, N-1, \sigma_0^l, l = 0, \dots, N$ sowie $v_{-1}^l, l = 1, \dots, N$. Im Fall der Randbedingungen (3.38) ist gemäß Bemerkung 3.4.3 $\varepsilon_0^0 = 0$.

Induktionsannahme:

Sei $m \in \{1, \dots, M\}$. Für $-1 \leq k \leq m-1$ existiere eine eindeutige Lösung $\varepsilon_k^l, 0 \leq l \leq N-1$, und $v_k^l, 1 \leq l \leq N$. Im Fall der Randbedingungen (3.38) sei $\varepsilon_{m-1}^0 = 0$.

Induktionsschluß :

Da die Lösungen $\varepsilon_k^l, -1 \leq k \leq m-1, 0 \leq l \leq N-1$ nach Induktionsannahme existieren, ist für jedes $l \in \{0, \dots, N-1\}$ der Zweig $\tilde{\Phi}_{(\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_{m-1}^l)}$ des diskreten Hysteresese-Operators $\tilde{\mathcal{H}}^\delta$ zur diskreten Vergangenheit $(\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_{m-1}^l)$ gegeben durch

$$\hat{\Phi}_{m,l}^\delta(x) := \tilde{\Phi}_{(\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_{m-1}^l)}(x) = \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_{m-1}^l, x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die sich aus Lemma 3.4.2 ergebende Lipschitz-Stetigkeit von $\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta$, überträgt sich auf die Funktionen $\hat{\Phi}_{m,l}^\delta$ mit einheitlicher Lipschitz-Konstante $L = b$.

Im Fall von Problem (D_A) folgt aus Lemma 4.0.2 (i) und den Randbedingungen (3.37) die eindeutige Existenz von Lösungen $\varepsilon_m^l, \sigma_m^l, l = 0, \dots, N-1$ und $v_m^l, l = 0, \dots, N$. Aus Gleichung (3.32) für $l = N$ ergibt sich eindeutig $\sigma_m^N = \sigma_m^{N-1} - kg_m^N$.

Im Fall von Problem (D_B) folgt aus Lemma 4.0.2 (ii) und den Randbedingungen (3.38) die eindeutige Existenz von Lösungen $\varepsilon_m^l, l = 1, \dots, N-1, \sigma_m^l, l = 0, \dots, N$ und $v_m^l, l = 1, \dots, N$. Aus Bemerkung 3.4.3 folgt $\varepsilon_m^0 = 0$. Da nach Induktionsannahme auch $\varepsilon_{m-1}^0 = 0$ ist, folgt aus Gleichung 3.33 $v_m^0 = v_m^1$.

Im Fall von Problem (D_C) folgt aus Lemma 4.0.2 (iii) und den Randbedingungen (3.39) sofort die eindeutige Existenz der Lösungen $\varepsilon_m^l, l = 0, \dots, N-1, \sigma_m^l, l = 0, \dots, N$ und $v_m^l, l = 0, \dots, N$ zum Zeitschritt m .

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt damit die Existenz einer eindeutigen Lösung für das gesamte Gleichungssystem, d. h. für alle Zeitschritte $m \leq M$. \square

Kapitel 5

Abschätzungen zur Wellengleichung mit Hysterese

Die Eigenschaften der betrachteten Hysterese-Operatoren ermöglichen die Herleitung von zwei verschiedenen Energieabschätzungen für die in Abschnitt 3.1 eingeführte Wellengleichung mit Hysterese, die wir Energieabschätzungen erster und zweiter Ordnung nennen. Diese Abschätzungen werden in diesem Kapitel auf das in Abschnitt 3.4 eingeführte Finite-Differenzen-Schema übertragen. Wir werden von der Wahl der Diskretisierungsparameter unabhängige diskrete Energieabschätzungen erster und zweiter Ordnung herleiten. Die Energieabschätzung zweiter Ordnung liefert die Grundlage für den in Kapitel 6 geführten Konvergenzbeweis und für die Fehlerabschätzung.

Für die Energieabschätzung erster Ordnung wird die lokale Monotonie der Familie der Hysterese-Operatoren \mathcal{H}^δ , $\delta \geq 0$, und die Existenz von freien Energie-Operatoren \mathcal{F}^δ , $\delta \geq 0$, vorausgesetzt, so daß das Paar $(\mathcal{H}^\delta, \mathcal{F}^\delta)$, $\delta \geq 0$, eine aus den Hauptsätzen der Thermodynamik hergeleitete Bedingung, die Energie-Ungleichung, welche in Definition 5.2.1 eingeführt werden wird, erfüllt.

Für die Energieabschätzung zweiter Ordnung wird die lokal starke Monotonie und Lipschitz-Stetigkeit der Familie der approximierenden Hysterese-Operatoren \mathcal{H}^δ , $\delta \geq 0$, mit einheitlicher Monotonie- und Lipschitz-Konstante vorausgesetzt. Außerdem wird gefordert, daß jeder Zweig der Hysterese-Operatoren zu einer beliebigen Vergangenheit $v \in C([0, t])$ im Intervall $[v(t), \infty)$ eine konkave und im Intervall $(-\infty, v(t)]$ eine konvexe Funktion ist.

5.1 Hilfsmittel

Im folgenden finden sich grundlegende Abschätzungen und Konvergenzaussagen, die für die Energieabschätzungen in diesem Kapitel und den Konvergenzbeweis und die Fehlerabschätzung im Kapitel 6 benötigt werden. Bei den ersten drei Lemmata handelt es sich um Standardwerkzeuge, weshalb wir auf einen Beweis verzichten.

Lemma 5.1.1 (Höldersche Ungleichung) Sei G eine meßbare Teilmenge der \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$. Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $u \in L^p(G)$ und $v \in L^q(G)$ ist $uv \in L^1(G)$ und es gilt

$$\|fg\|_{L^1(G)} \leq \|f\|_{L^p(G)} \|g\|_{L^q(G)}.$$

Lemma 5.1.2 (Youngsche Ungleichung) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ gilt

$$ab \leq \frac{\epsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\epsilon} b^2.$$

Lemma 5.1.3 (Diskretes Lemma von Gronwall) Für nichtnegative reelle Zahlen $c, a_0, \dots, a_n, x_0, \dots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, gelte

$$\begin{aligned} x_0 &\leq c, \\ x_i &\leq c + \sum_{j=0}^{i-1} a_j x_j \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$x_i \leq c \exp \left(\sum_{j=0}^{i-1} a_j \right) \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Lemma 5.1.4 Sei $g \in L^2((0, 1) \times (0, T))$. Sei $g^K \in L^2((0, 1) \times (0, T))$ die stückweise konstante Interpolierende der durch Definition (3.31) gegebenen Mittelwerte g_m^l

$$\begin{aligned} g^K(x, t) &:= g_m^l \quad \text{für } (x, t) \in [x_{l-1}, x_l] \times [t_{m-1}, t_m], \\ &1 \leq l \leq N = N(K), \quad 1 \leq m \leq M = M(K), \end{aligned}$$

mit $N(K), M(K) \rightarrow \infty$ für $K \rightarrow \infty$. Dann gilt

$$g^K \rightarrow g \quad \text{in } L^2((0, 1) \times (0, T)) \quad \text{für } K \rightarrow \infty.$$

Ist $g \in L^2(0, T; W^{1,2}(0, 1)) \cap W^{1,2}(0, T; L^2(0, 1))$, dann gilt

$$\|g - g^K\|_{L^2((0,1) \times (0,T))} = O(h + k).$$

Beweis:

Die Funktion g sei so auf \mathbb{R}^2 fortgesetzt, daß $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\|g - g^K\|_{L^2((0,1) \times (0,T))}^2 \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^N \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{x_{l-1}}^{x_l} |g - g_m^l|^2(x, t) dx dt \\ &= \frac{1}{(hk)^2} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^N \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left| \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{x_{l-1}}^{x_l} (g(x, t) - g(\xi, \tau)) d\xi d\tau \right|^2 dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \frac{1}{hk} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^N \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{x_{l-1}}^{x_l} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{x_{l-1}}^{x_l} (g(x, t) - g(\xi, \tau))^2 d\xi d\tau dx dt \\
& \leq \frac{1}{hk} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^N \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{x_{l-1}}^{x_l} \int_{t-h}^{t+h} \int_{x-k}^{x+k} (g(x, t) - g(\xi, \tau))^2 d\xi d\tau dx dt \\
& = \frac{1}{hk} \int_0^T \int_0^1 \int_{-h}^h \int_{-k}^k (g(x, t) - g(x+s, t+r))^2 ds dr dx dt \\
& = \frac{1}{hk} \int_{-h}^h \int_{-k}^k \|g(\cdot + s, \cdot + r) - g\|_{L^2((0,1) \times (0,T))}^2 ds dr \rightarrow 0 \quad \text{für } K \rightarrow \infty, \quad (5.1)
\end{aligned}$$

wobei die Konvergenz aus der Stetigkeit im Mittel der zur p -ten Potenz, $1 \leq p < \infty$, Lebesgue-integrierbaren Funktionen folgt (vgl. z.B. [Alt92, Lemma 2.5]). Danach gilt

$$\|g(\cdot + s, \cdot + r) - g\|_{L^2((0,1) \times (0,T))}^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } r, s \rightarrow 0.$$

Nach Voraussetzung gilt $N(K), M(K) \rightarrow \infty$ für $K \rightarrow \infty$ und damit $k = \frac{1}{N}, h = \frac{T}{M} \rightarrow 0$. Ist $g \in L^2(0, T; W^{1,2}(0, 1)) \cap W^{1,2}(0, T; L^2(0, 1))$, dann läßt sich die Abschätzung verbessern. g sei so auf \mathbb{R}^2 fortgesetzt, daß $g \in L^2(\mathbb{R}; W^{1,2}(\mathbb{R})) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}))$ ist. Eine solche Fortsetzung existiert, wie in [Hes41] gezeigt wird. Nach der vorhergehenden Abschätzung und dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned}
& \|g - g^K\|_{L^2((0,1) \times (0,T))}^2 \\
& \leq \frac{1}{hk} \int_0^T \int_0^1 \int_{-h}^h \int_{-k}^k (g(x, t) - g(x+s, t+r))^2 ds dr dx dt \\
& \leq \frac{2}{hk} \int_{-h}^h \int_{-k}^k \int_0^T \int_0^1 \left(\int_0^s |g_x(x+\xi, t+r)| d\xi \right)^2 dx dt ds dr \\
& \quad + \frac{2}{hk} \int_{-h}^h \int_{-k}^k \int_0^T \int_0^1 \left(\int_0^r |g_t(x, t+\tau)| d\tau \right)^2 dx dt ds dr \\
& \leq 32k^2 \|g_x\|_{L^2(-h, T+h; L^2(-k, 1+k))}^2 + 32h^2 \|g_t\|_{L^2(-h, T+h; L^2(0, 1))}^2 \\
& = O((h+k)^2).
\end{aligned}$$

□

Lemma 5.1.5 Sei $g \in L^2((0, 1) \times (0, T))$. Für $m \in \{1, \dots, M\}$, $l \in \{1, \dots, N\}$ sei g_m^l der in Definition (3.31) eingeführte Mittelwert. Für jedes $i \in \{1 \dots M\}$ gilt

$$hk \sum_{m=1}^i \sum_{l=1}^N |g_m^l|^2 \leq \|g\|_{L^2((0,1) \times (0, ih))}^2. \quad (5.2)$$

Beweis:

$$h^2 k^2 \sum_{m=1}^i \sum_{l=1}^N |g_m^l|^2 = \sum_{m=1}^i \sum_{l=0}^{N-1} \left| \int_{(m-1)h}^{mh} \int_{lk}^{(l+1)k} g(x, t) dx dt \right|^2$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{C.S.}-\text{Ungl.}}{\leq} \sum_{m=1}^i \sum_{l=0}^{N-1} kh \int_{(m-1)h}^{mh} \int_{lk}^{(l+1)k} g^2(x, t) dx dt \\
& = kh \|g\|_{L^2((0,1) \times (0,ih))}^2 .
\end{aligned}$$

□

Lemma 5.1.6 Sei $g \in W^{1,2}(-h, T; L^2(0, 1))$. Für $m \in \{1, \dots, M\}$, $l \in \{1, \dots, N\}$ sei g_m^l der in Definition (3.31) eingeführte Mittelwert. Dann gilt für jedes $i \in \{1, \dots, M\}$

$$\frac{hk}{2} \sum_{m=1}^i \sum_{l=1}^N \left(|g_m^l|^2 + \left| \frac{g_m^l - g_{m-1}^l}{h} \right|^2 \right) \leq \|g\|_{W^{1,2}(-h, ih; L^2(0,1))}^2 . \quad (5.3)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
& hk \sum_{m=1}^i \sum_{l=1}^N (D_h g_m^l)^2 \\
& = \frac{1}{h^3 k} \sum_{m=1}^i \sum_{l=1}^N \left(\int_{(m-1)h}^{mh} \int_{(l-1)k}^{lk} (g(x, t) - g(x, t-h)) dx dt \right)^2 \\
& \stackrel{\text{C.S.}-\text{Ungl.}}{\leq} \frac{1}{h} \sum_{m=1}^i \sum_{l=1}^N \int_{(m-1)h}^{mh} \int_{t-h}^t \int_{(l-1)k}^{lk} g_t^2(x, s) dx ds dt \\
& = \frac{1}{h} \sum_{m=1}^i \int_{-h}^0 \int_{(m-1)h+t}^{mh+t} \int_0^1 g_t^2(x, s) dx ds dt \\
& = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \int_t^{ih+t} \int_0^1 g_t^2(x, s) dx ds dt \\
& \leq \frac{1}{h} \int_{-h}^0 dt \|g_t\|_{L^2(-h, ih; L^2(0,1))}^2 \leq \|g\|_{W^{1,2}(-h, ih; L^2(0,1))}^2 .
\end{aligned}$$

Zusammen mit dem vorhergehenden Lemma 5.1.5 folgt die Abschätzung (5.3). □

Lemma 5.1.7 Sei $y \in W^{1,2}(0, 1)$, $y(x_{N+1}) := y(x_N)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k} \sum_{l=1}^N (y(x_l) - y(x_{l-1}))^2 \leq \|y\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 , \\
& \frac{1}{k} \sum_{l=1}^N (y(x_{l+1}) - 2y(x_l) + y(x_{l-1}))^2 \leq 4 \|y\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 .
\end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} \sum_{l=1}^N (y(x_l) - y(x_{l-1}))^2 & = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^N \left(\int_{x_{l-1}}^{x_l} y'(x) dx \right)^2 \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \frac{1}{k} \sum_{l=1}^N \left(\int_{x_{l-1}}^{x_l} |y'(x)|^2 dx \right) k \\
& = \int_0^1 |y'(x)|^2 dx \leq \|y\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k} \sum_{l=1}^N (y(x_{l+1}) - 2y(x_l) + y(x_{l-1}))^2 \\
& \leq \frac{2}{k} \sum_{l=1}^N (y(x_{l+1}) - y(x_l))^2 + \frac{2}{k} \sum_{l=1}^N (y(x_l) - y(x_{l-1}))^2 \\
& \stackrel{y(x_{N+1})=y(x_N)}{\leq} \frac{4}{k} \sum_{l=1}^N (y(x_l) - y(x_{l-1}))^2 \leq 4 \|y\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 .
\end{aligned}$$

□

Elementare Berechnungen liefern die folgenden Identitäten.

Lemma 5.1.8 *Seien $a, b, a_i, b_i, i = -1, \dots, N$, reelle Zahlen. Dann gilt*

$$(a - b)a = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + (a - b)^2), \quad (5.4)$$

$$\sum_{i=0}^N (b_i - b_{i-1})a_i = - \sum_{i=0}^{N-1} b_i(a_{i+1} - a_i) + a_N b_N - a_0 b_{-1}, \quad (5.5)$$

$$\sum_{i=0}^N (b_i - b_{i-1})a_i = - \sum_{i=0}^N b_{i-1}(a_i - a_{i-1}) + a_N b_N - a_{-1} b_{-1}. \quad (5.6)$$

Lemma 5.1.9 *Seien $N, M \in \mathbb{N}$, $(a_m^l)_{m \in \{0, \dots, M\}, l \in \{0, \dots, N\}} \in \mathbb{R}^{(M+1) \times (N+1)}$, $h = \frac{T}{M}$, $k = \frac{1}{N}$. Es gelte*

$$\max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (D_h a_m^l)^2 \leq K_1, \quad (5.7)$$

$$\max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (D_k a_m^l)^2 \leq K_2, \quad (5.8)$$

$$k \left| \sum_{l=1}^N a_0^l \right| \leq K_3. \quad (5.9)$$

Dann folgt

$$\max_{1 \leq m \leq M, 0 \leq l \leq N} |a_m^l| \leq K_3 + T K_1^{\frac{1}{2}} + K_2^{\frac{1}{2}}. \quad (5.10)$$

Beweis:

Für jedes $m \in \{1, \dots, M\}$, $l \in \{0, \dots, N\}$ gilt

$$a_m^l = a_0^l + h \sum_{i=1}^m D_h a_i^l,$$

woraus mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} k \left| \sum_{l=1}^N a_m^l \right| &\leq k \left| \sum_{l=1}^N a_0^l \right| + kh \sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^m |D_h a_i^l| \leq K_3 + h \sum_{i=1}^m \left(k \sum_{l=1}^N (D_h a_i^l)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K_3 + Mh \max_{1 \leq m \leq M} \left(k \sum_{l=1}^N (D_h a_i^l)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq K_3 + TK_1^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Für $l, j \in \mathbb{R}$ sei $\mu_{lj} := \min\{l, j\}$, $M_{lj} := \max\{l, j\}$. Dann ist für jedes $m \in \{1, \dots, M\}$ und $l, j \in \{0, \dots, N\}$

$$a_m^l - a_m^j = \text{sign}(l - j) \left(a_m^{M_{lj}} - a_m^{\mu_{lj}} \right) = \text{sign}(l - j) k \sum_{p=\mu_{lj}+1}^{M_{lj}} D_k a_m^p.$$

Es gilt also die Identität

$$Na_m^l = \sum_{j=1}^N a_m^j + k \sum_{j=1}^N \text{sign}(l - j) \sum_{p=\mu_{lj}+1}^{M_{lj}} D_k a_m^p.$$

Daraus folgt für jedes a_m^l , $m \in \{1, \dots, M\}$, $l \in \{0, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} |a_m^l| &\leq k \left| \sum_{j=1}^N a_m^j \right| + k^2 \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^N |D_k a_m^p| \leq K_3 + TK_1^{\frac{1}{2}} + \max_{1 \leq m \leq M} \left(k \sum_{p=1}^N (D_k a_m^p)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K_3 + TK_1^{\frac{1}{2}} + K_2^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

Lemma 5.1.10 Für $N, M \in \mathbb{N}$, $(a_m^l)_{m \in \{0, \dots, M\}, l \in \{1, \dots, N\}} \in \mathbb{R}^{(M+1) \times N}$, $h = \frac{T}{M}$, $k = \frac{1}{N}$ gilt

$$\max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (a_m^l)^2 \leq 2k \sum_{l=1}^N (a_0^l)^2 + 2T^2 \max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (D_h a_m^l)^2.$$

Beweis:

Für jedes $l \in \{1, \dots, N\}$, $m \in \{1, \dots, M\}$ gilt

$$\begin{aligned} (a_m^l)^2 &= \left(a_0^l + h \sum_{j=1}^m D_h a_j^l \right)^2 \leq 2(a_0^l)^2 + 2mh^2 \sum_{j=1}^m (D_h a_j^l)^2 \\ &\leq 2(a_0^l)^2 + 2Th \sum_{j=1}^M (D_h a_j^l)^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt für jedes $m \in \{1, \dots, M\}$ und damit auch für das Maximum

$$\begin{aligned} k \sum_{l=1}^N (a_m^l)^2 &\leq 2k \sum_{l=1}^N (a_0^l)^2 + 2Tkh \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^N (D_h a_j^l)^2 \\ &\leq 2k \sum_{l=1}^N (a_0^l)^2 + 2T^2 \max_{1 \leq j \leq M} k \sum_{l=1}^N (D_h a_j^l)^2. \end{aligned}$$

□

Es folgen von den Diskretisierungsparametern unabhängige Abschätzungen für die diskreten Anfangswerte der Spannungen bzw. ihrer diskreten Ortsableitungen in der diskreten L^2 -Norm.

Lemma 5.1.11 *Für die Familie der Hysteresese-Operatoren \mathcal{H}^δ , $\delta \geq 0$, sei die Voraussetzung 1 aus dem Abschnitt 3.2 erfüllt. Dann gilt unabhängig von der Wahl der Diskretisierungsparameter N , M und δ*

$$\left(k \sum_{l=1}^N |\sigma_0^{l-1}| \right)^2 \leq k \sum_{l=1}^N (\sigma_0^{l-1})^2 \leq 2b^2 \|\varepsilon_0\|_{C([0,1])}^2 + 2b^2 T^2 \|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2.$$

Beweis:

Wegen $\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((0, \dots, 0)) = 0$, der Lipschitz-Stetigkeit der Endauswertungen der zeitdiskreten Hysteresese-Operatoren $\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta$ nach Lemma 3.4.2 und der Gleichungen (3.33), (3.34) des Differenzenschemas gilt für jedes $l \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\begin{aligned} \sigma_0^l &= \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_{-1}^l, \varepsilon_0^l)) - \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((0, 0)) \\ &\leq \left| \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_{-1}^l, \varepsilon_0^l)) - \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((0, 0)) \right| \\ &\leq b \max\{|\varepsilon_{-1}^l|, |\varepsilon_0^l|\} \leq b \left(|\varepsilon_0^l| + \frac{h}{k} |v_0^{l+1} - v_0^l| \right). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Daraus ergibt sich aufgrund der Regularität der Anfangswerte und Lemma 5.1.7

$$\begin{aligned} k \sum_{l=1}^N (\sigma_0^{l-1})^2 &\leq 2b^2 k \sum_{l=1}^N (\varepsilon_0^{l-1})^2 + 2b^2 \frac{h^2}{k} \sum_{l=1}^N (v_0^l - v_0^{l-1})^2 \\ &= 2b^2 k \sum_{l=1}^N (\varepsilon_0(x_{l-1}))^2 + 2b^2 \frac{h^2}{k} \sum_{l=1}^N (v_0(x_l) - v_0(x_{l-1}))^2 \\ &\leq 2b^2 \|\varepsilon_0\|_{C([0,1])}^2 + 2b^2 h^2 \|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 \\ &\leq 2b^2 \|\varepsilon_0\|_{C([0,1])}^2 + 2b^2 T^2 \|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2. \end{aligned}$$

□

Lemma 5.1.12 *Es sei die Voraussetzung 1 aus dem Abschnitt 3.2 erfüllt. Falls für das Verhältnis der Schrittweiten $h < \frac{k}{2\sqrt{b}}$ gilt, dann existiert eine positive Konstante $D =$*

$D(v_0, \varepsilon_0, b, g)$, so daß unabhängig von der Wahl der Diskretisierungsparameter N , M und δ mit einer Einbettungskonstante $c > 0$ gilt

$$k \sum_{l=1}^N (D_k \sigma_0^l)^2 \leq 2b^2 \|\varepsilon_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 + 2b \|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 + c \|g\|_{W^{1,2}(0,T;L^2(0,1))}^2 =: D(v_0, \varepsilon_0, b, g).$$

Beweis:

Wir schätzen zunächst den Term $D_k \sigma_0^N$ in Abhängigkeit von den Randbedingungen ab. Im Fall von Problem (D_A) gilt $v_{-1}^N = v_0^N = 0$ und damit wegen Gleichung (3.32) des Differenzenschemas $0 = D_k \sigma_0^N + g_0^N$. Daraus folgt die Abschätzung

$$(D_k \sigma_0^N)^2 \leq \sum_{l=1}^N (g_0^l)^2.$$

Im Fall der Probleme (D_B) und (D_C) ist $\sigma_0^N = 0$ und $\varepsilon_0^N = \varepsilon_0(1) = 0$. Aus Lemma 3.4.2 folgt $\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_0^N, \varepsilon_0^N)) = 0$. Deshalb gilt die Gleichungskette

$$\begin{aligned} (D_k \sigma_0^N)^2 &= \left(\frac{\sigma_0^{N-1}}{k} \right)^2 = \frac{1}{k^2} \left(\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_{-1}^{N-1}, \varepsilon_0^{N-1})) \right)^2 \\ &= \frac{1}{k^2} \left(\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_{-1}^{N-1}, \varepsilon_0^{N-1})) - \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_0^N, \varepsilon_0^N)) \right)^2. \end{aligned}$$

Definieren wir $\varepsilon_{-1}^N := \varepsilon_0^N$, dann gilt für jedes der Probleme (D_A) , (D_B) , (D_C)

$$k (D_k \sigma_0^N)^2 \leq k \sum_{l=1}^N (g_0^l)^2 + \frac{1}{k} \left(\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_{-1}^N, \varepsilon_0^N)) - \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_{-1}^{N-1}, \varepsilon_0^{N-1})) \right)^2. \quad (5.12)$$

Wegen (5.12), der Lipschitz-Stetigkeit des Hysterese-Operators nach Lemma 3.4.2, der Definition von g_0^l , $l \in \{1, \dots, N\}$, der Gleichung (3.33) des Differenzen-Schemas, dem Lemma 5.1.7 und der Bedingung an das Schrittweitenverhältnis $h < \frac{k}{2\sqrt{b}}$ gilt mit der Einbettungskonstanten $c > 0$ für die stetige Einbettung

$$W^{1,2}(0, T; L^2(0, 1)) \hookrightarrow L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$$

unabhängig von den Diskretisierungsparametern N , M und δ

$$\begin{aligned} & k \sum_{l=1}^N (D_k \sigma_0^l)^2 \\ & \leq \frac{1}{k} \sum_{l=1}^N \left(\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_{-1}^l, \varepsilon_0^l)) - \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_{-1}^{l-1}, \varepsilon_0^{l-1})) \right)^2 + k \sum_{l=1}^N (g_0^l)^2 \\ & \leq \frac{b^2}{k} \sum_{l=1}^N \max \{ (\varepsilon_0^l - \varepsilon_0^{l-1})^2, (\varepsilon_{-1}^l - \varepsilon_{-1}^{l-1})^2 \} \\ & \quad + \frac{1}{k} \sum_{l=1}^N \left(\int_{(l-1)k}^{lk} g(x, 0) dx \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.33), v_0^{N+1} &:= v_0^N \\
&\leq \frac{b^2}{k} \sum_{l=1}^N \max \left\{ (\varepsilon_0^l - \varepsilon_0^{l-1})^2, \left((\varepsilon_0^l - \varepsilon_0^{l-1}) - \frac{h}{k} (v_0^{l+1} - 2v_0^l + v_0^{l-1}) \right)^2 \right\} \\
&\quad + \frac{1}{k} \sum_{l=1}^N \left(\int_{(l-1)k}^{lk} g(x, 0) dx \right)^2 \\
&\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \frac{2b^2}{k} \sum_{l=1}^N \left((\varepsilon_0^l - \varepsilon_0^{l-1})^2 + \frac{h^2}{k^2} (v_0^{l+1} - 2v_0^l + v_0^{l-1})^2 \right) + \|g(x, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 \\
(3.35), (3.36) &\leq \frac{2b^2}{k} \sum_{l=1}^N (\varepsilon_0(x_l) - \varepsilon_0(x_{l-1}))^2 \\
&\quad + \frac{2b^2 h^2}{k^3} \sum_{l=1}^N (v_0(x_{l+1}) - 2v_0(x_l) + v_0(x_{l-1}))^2 + \|g(x, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 \\
&\stackrel{\text{Lem. 5.1.7}}{\leq} 2b^2 \|\varepsilon_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 + 8b^2 \frac{h^2}{k^2} \|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 + \|g\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}^2 \\
&\leq 2b^2 \|\varepsilon_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 + 2b \|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 + c \|g\|_{W^{1,2}(0,T;L^2(0,1))}^2 .
\end{aligned}$$

□

5.2 Erste Energieabschätzung

Genauere Ausführungen zu den folgenden, als Motivation gedachten, Überlegungen finden sich in [BS96, Sect. 2.5] und [K96, Sect. I.1].

Für kleine Verzerrungen ε ergibt sich im elastischen, also reversiblen, kontinuierlichen Fall das Materialgesetz, welches die Spannungs-Verzerrungs-Relation beschreibt, aus der freien Energiedichte $F = F(\varepsilon)$

$$\sigma = \frac{dF}{d\varepsilon}(\varepsilon).$$

Für die Leistungsdichte $\sigma \varepsilon_t$ gilt also, falls die Kettenregel angewendet werden darf,

$$\sigma \varepsilon_t = \frac{dF}{d\varepsilon}(\varepsilon) \varepsilon_t = (F(\varepsilon))_t.$$

In unserem Ansatz in der konstitutiven Gleichung (3.3) haben wir ein allgemeineres, durch Hysterese-Operatoren definiertes Materialgesetz gewählt, mit dem sich insbesondere auch (ratenunabhängiges) plastisches und damit irreversibles Verhalten beschreiben läßt, bei dem Energie dissipiert wird. Damit dieser Ansatz physikalisch sinnvoll ist, muß es zu dem Hysterese-Operator \mathcal{H} einen Operator \mathcal{F} geben, der als die zugehörige freie Energiedichte interpretiert werden kann, so daß das Paar die Energie-Ungleichung (5.13) erfüllt.

Definition 5.2.1 Seien $\mathcal{H}, \mathcal{F} : W^{1,\infty}(0, T) \rightarrow W^{1,1}(0, T)$ Hysterese-Operatoren. Das Paar $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ heißt **thermodynamisch konsistent**, wenn für alle $\varepsilon \in W^{1,\infty}(0, T)$ die

Energie-Ungleichung

$$\mathcal{H}[\varepsilon](t)\varepsilon_t(t) \geq (\mathcal{F}[\varepsilon])_t(t) \quad \text{für fast alle } t \in (0, T) \quad (5.13)$$

erfüllt und $\mathcal{F}[\varepsilon] \geq 0$ ist.

Der Operator \mathcal{F} heißt dann **Hysterese – Potential**.

Bemerkung 5.2.2 Die Ungleichung (5.13) folgt im isothermen Fall als notwendige Bedingung aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik und dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik in Form der Clausius-Duhem-Ungleichung. Die nichtnegative Funktion $\mathcal{H}[\varepsilon]\varepsilon_t - (\mathcal{F}[\varepsilon])_t$ läßt sich als Dissipationsrate interpretieren.

Existiert zu dem Hysterese-Operator \mathcal{H} , der das Materialgesetz (3.3) definiert, ein Hysterese-Potential \mathcal{F} , dann läßt sich zu den Problemen (P_A) , (P_B) und (P_C) eine Energieabschätzung gewinnen. Testet man die Gleichung (3.1) mit v und die Gleichung (3.2) mit σ und integriert die Summe über den Ort, dann liefert die thermodynamische Konsistenz von $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ im Fall einer verschwindenden Kontrollfunktion g , daß das Energiefunktional erster Ordnung

$$E_1(t) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2} v^2(x, t) + \mathcal{F}[\varepsilon(x, \cdot)](t) \right) dx$$

entlang Lösungen monoton fällt.

Diese Überlegung wollen wir auf den diskreten Fall übertragen. Dazu definieren wir zunächst, was wir unter diskreter thermodynamischer Konsistenz verstehen wollen. Danach formulieren wir in Voraussetzung 5.2.4 die Annahmen unter denen wir in Satz 5.2.8 eine diskrete Energieabschätzung herleiten. Im Lemma 5.2.5 zeigen wir, wie sich die thermodynamische Konsistenz von $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ für lokal monotone Operatoren \mathcal{H} sofort auf den diskreten Fall überträgt. Mit Hilfe dieses Lemmas konstruieren wir Beispiele, die die Voraussetzung 5.2.4 erfüllen.

Definition 5.2.3 Seien $\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{F}}$ zeitdiskrete Hysterese-Operatoren. Für jedes $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) \in S(\mathbb{R})$ gelte $\tilde{\mathcal{F}}_f((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)) \geq 0$. Das Paar $(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{F}})$ heißt **diskret thermodynamisch konsistent**, wenn für jede endliche Folge $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) \in S(\mathbb{R})$ mit $n \geq 1$ gilt

$$\tilde{\mathcal{H}}_f((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n))(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) \geq \tilde{\mathcal{F}}_f((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)) - \tilde{\mathcal{F}}_f((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1})). \quad (5.14)$$

$\tilde{\mathcal{F}}$ heißt **diskretes Hysterese-Potential**.

Voraussetzung 5.2.4

Sei \mathcal{H}^δ , $\delta \geq 0$, die Familie der Hysterese-Operatoren aus der Voraussetzung 1 und $\tilde{\mathcal{H}}^\delta$, $\delta \geq 0$, die Familie der zugehörigen zeitdiskreten Hysterese-Operatoren.

- (i) Zu jedem $\tilde{\mathcal{H}}^\delta$, $\delta \geq 0$, gibt es ein diskretes Hysterese-Potential $\tilde{\mathcal{F}}^\delta$, d. h. das Paar $(\tilde{\mathcal{H}}^\delta, \tilde{\mathcal{F}}^\delta)$ ist diskret thermodynamisch konsistent. Wir definieren

$$\phi_m^l := \tilde{\mathcal{F}}_f^\delta((\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_m^l)), \quad l = 0, \dots, N-1, \quad m = -1, \dots, M, \quad (5.15)$$

wobei die Werte ε_n^l , $-1 \leq n \leq M$, $0 \leq l \leq N-1$, Lösungskomponenten des diskreten Problems (D_A) , (D_B) bzw. (D_C) sind und δ der zugehörige Diskretisierungsparameter ist.

- (ii) Es existiert eine Konstante $E > 0$, so daß sich die diskrete L^1 -Norm der Anfangswerte des diskreten Hysterese-Potentials unabhängig von den Diskretisierungsparametern N , M und δ nach oben abschätzen läßt:

$$k \sum_{l=1}^N \phi_0^{l-1} \leq E(\|\varepsilon_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 + \|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2).$$

Ist der Hysterese-Operator \mathcal{H} lokal monoton und das Paar $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ thermodynamisch konsistent, dann ist das zugehörige Paar von zeitdiskreten Hysterese-Operatoren $(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{F}})$ diskret thermodynamisch konsistent, wie das folgende Lemma zeigt. Für den Spezialfall der Stop-Operatoren hatten wir dies schon in Korollar 2.2.13 gezeigt.

Lemma 5.2.5 *Sei $0 \leq a < b \leq T$ und das Paar $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ thermodynamisch konsistent. Ist \mathcal{H} lokal monoton, gilt also für alle $\varepsilon \in W^{1,\infty}(0, T)$*

$$(\mathcal{H}[\varepsilon])_t(t) \varepsilon_t(t) \geq 0 \quad \text{für fast alle } t \in (0, T), \quad (5.16)$$

dann gilt in jedem Monotonie-Intervall (a, b) von ε

$$\mathcal{H}[\varepsilon](b) (\varepsilon(b) - \varepsilon(a)) \geq \mathcal{F}[\varepsilon](b) - \mathcal{F}[\varepsilon](a). \quad (5.17)$$

Beweis:

Wir nutzen die lokale Monotonie von \mathcal{H} . Ist ε monoton steigend (fallend) in (a, b) , dann ist es auch die Funktion $\mathcal{H}[\varepsilon]$. Insbesondere gilt also $\mathcal{H}[\varepsilon](t) \varepsilon_t(t) \leq \mathcal{H}[\varepsilon](b) \varepsilon_t(t)$ für fast alle $t \in (a, b)$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\varepsilon](b) - \mathcal{F}[\varepsilon](a) &= \int_a^b (\mathcal{F}[\varepsilon])_t(t) dt \stackrel{(5.13)}{\leq} \int_a^b \mathcal{H}[\varepsilon](t) \varepsilon_t(t) dt \\ &\stackrel{(5.16)}{\leq} \mathcal{H}[\varepsilon](b) \int_a^b \varepsilon_t(t) dt = \mathcal{H}[\varepsilon](b) (\varepsilon(b) - \varepsilon(a)). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.2.6 Erfüllen die Hysterese-Operatoren \mathcal{H}, \mathcal{F} die Bedingungen (5.13), (5.16) und sind $\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{F}}$ die zeitdiskreten Hysterese-Operatoren zu \mathcal{H} bzw. \mathcal{F} , dann ist das Paar $(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{F}})$ diskret thermodynamisch konsistent. Dies folgt sofort aus dem Lemma 5.2.5 und der Definition 2.4.4 der zeitdiskreten Hysterese-Operatoren, da für jedes $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) \in S(\mathbb{R})$, $n \geq 1$, gilt, wobei ε die stückweise affine Interpolierende von $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$ ist,

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathcal{H}}_f((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n))(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) \stackrel{\text{Def. 2.4.4}}{=} \mathcal{H}[\varepsilon](T) (\varepsilon(T) - \varepsilon(\frac{n-1}{n}T)) \\ &\stackrel{(5.17)}{\geq} \mathcal{F}[\varepsilon](T) - \mathcal{F}[\varepsilon](\frac{n-1}{n}T) \stackrel{\text{Def. 2.4.4}}{=} \tilde{\mathcal{F}}_f((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)) - \tilde{\mathcal{F}}_f((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1})). \end{aligned}$$

Beispiele 5.2.7 (i) Das Paar $(\mathcal{H}, \mathcal{F}) := (\mathfrak{s}_r, \frac{1}{2}\mathfrak{s}_r^2)$, $r > 0$, ist nach der Energie-Ungleichung des Stop-Operators (2.9) thermodynamisch konsistent. Da der Stop-Operator \mathfrak{s}_r nach der Ungleichung (2.10) lokal monoton ist, liefert Lemma 5.2.5, daß das zugehörige Paar von

zeitdiskreten Hysterese-Operatoren $(\tilde{\mathfrak{s}}_r, \frac{1}{2}\tilde{\mathfrak{s}}_r^2)$ diskret thermodynamisch konsistent ist. Also erfüllt $(\tilde{\mathcal{H}}^\delta, \tilde{\mathcal{F}}^\delta) := (\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{F}})$ für jedes $\delta \geq 0$ die Voraussetzung 5.2.4 (i).

(ii) Sei $\mathcal{H}^0 := \mathcal{H}$ der Prandtl-Ishlinskii-Operator zur Verteilungsfunktion $\nu =: \nu_0$. Für $\delta > 0$ sei \mathcal{H}^δ , entweder der in Gleichung (2.43) oder der in Gleichung (2.52) definierte approximierende Prandtl-Ishlinskii-Operator zu \mathcal{H} . Dann ist jedes Paar $(\mathcal{H}^\delta, \mathcal{F}^\delta)$, $\delta \geq 0$, mit

$$\mathcal{F}^\delta[\varepsilon](t) := \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathfrak{s}_r^2[\varepsilon](t) d\nu_\delta(r)$$

thermodynamisch konsistent. Dies läßt sich ebenfalls aus der Energie-Ungleichung des Stop-Operators (2.9) folgern. Da der Prandtl-Ishlinskii-Operatoren \mathcal{H}^δ wegen Lemma 2.3.11 (iv) für jedes $\delta \geq 0$ lokal monoton ist, ist also auch das zugehörige Paar von zeitdiskreten Prandtl-Ishlinskii-Operatoren $(\tilde{\mathcal{H}}^\delta, \tilde{\mathcal{F}}^\delta)$ diskret thermodynamisch konsistent, wie sich wiederum aus Lemma 5.2.5 folgern läßt. Da sich der Stop-Operator \mathfrak{s}_r als Prandtl-Ishlinskii-Operator \mathcal{P} zur Verteilungsfunktion

$$\nu(\rho) := \begin{cases} -1 & \text{für } \rho \in [0, r), \\ 0 & \text{für } \rho \geq r. \end{cases}$$

darstellen läßt, gilt die folgende Abschätzung für beide Beispiele (i) und (ii).

Wegen der Lipschitz-Stetigkeit des Stop-Operators im Sinne der Abschätzung (2.13), der Gleichung (3.33), dem Lemma 5.1.7, den Anfangsbedingungen (3.35), (3.36) und der Regularität der Anfangswerte sowie dem Lemma 2.6.9 und der stetigen Einbettung von $W^{1,2}(0,1)$ in $C([0,1])$ mit Einbettungskonstante $C > 0$ in Verbindung mit $\mathfrak{s}_r[\varepsilon \equiv 0] \equiv 0$ für jedes $r > 0$ existiert eine Konstante $E := 4 \left(\int_0^\infty d\nu(r) \right) \max\{T^2, C^2\}$, so daß die folgende Abschätzung unabhängig von den gewählten Diskretisierungsparametern $N, M \in \mathbb{N}$, $\delta \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} k \sum_{l=1}^N \phi_0^{l-1} &= k \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{\mathcal{F}}_f^\delta((\varepsilon_{-1}^l, \varepsilon_0^l)) = \frac{k}{2} \sum_{l=0}^{N-1} \int_0^\infty \tilde{\mathfrak{s}}_{r,f}^2((\varepsilon_{-1}^l, \varepsilon_0^l)) d\nu_\delta(r) \\ &= \frac{k}{2} \sum_{l=0}^{N-1} \int_0^\infty (\tilde{\mathfrak{s}}_{r,f}^2((\varepsilon_{-1}^l, \varepsilon_0^l)) - \tilde{\mathfrak{s}}_{r,f}^2((0, 0)))^2 d\nu_\delta(r) \\ &\stackrel{(2.13)}{\leq} 2 \left(\int_0^\infty d\nu_\delta(r) \right) k \sum_{l=0}^{N-1} \max\{(\varepsilon_{-1}^l)^2, (\varepsilon_0^l)^2\} \\ &\stackrel{(3.33)}{\leq} 4 \left(\int_0^\infty d\nu_\delta(r) \right) k \sum_{l=0}^{N-1} \left(\frac{h^2}{k^2} (v_0^{l+1} - v_0^l)^2 + (\varepsilon_0^l)^2 \right) \\ &\stackrel{\text{Lem. 5.1.7}}{\leq} 4 \left(\int_0^\infty d\nu_\delta(r) \right) \left(h^2 \|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 + \max_{0 \leq l \leq N-1} \{(\varepsilon_0(x_l))^2\} \right) \\ &\stackrel{\text{Lem. 2.6.9}}{\leq} 4 \left(\int_0^\infty d\nu(r) \right) (h^2 \|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 + \|\varepsilon_0\|_{C([0,1])}^2) \\ &\leq 4 \left(\int_0^\infty d\nu(r) \right) (h^2 \|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 + C^2 \|\varepsilon_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4 \left(\int_0^\infty d\nu(r) \right) \max\{h^2, C^2\} (\|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 + \|\varepsilon_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2) \\
&\leq E(\|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 + \|\varepsilon_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2).
\end{aligned}$$

Damit ist die Voraussetzung 5.2.4 in beiden Beispielen (i) und (ii) erfüllt.

(iii) Sei $F \in C^2(\mathbb{R})$ eine konvexe Funktion, $F(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann erfüllt das Paar $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ von Superpositions-Operatoren definiert durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}[\varepsilon](t) &:= F'(\varepsilon(t)), \\
\mathcal{F}[\varepsilon](t) &:= F(\varepsilon(t)),
\end{aligned}$$

die Ungleichungen (5.13) und (5.16). Nach Proposition 5.2.5 sind deshalb die zugehörigen zeitdiskreten Operatoren $(\tilde{\mathcal{H}}^\delta, \tilde{\mathcal{F}}^\delta) := (\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{F}})$ für jedes $\delta \geq 0$ diskret thermodynamisch konsistent.

Das einfachste Beispiel ist $F(x) = ax^2$ für positive a .

Gilt zusätzlich die Wachstumsbedingung $|F(y)| \leq wy^p$ für ein $p \in \mathbb{N}$ und eine positive Konstante w , dann ist auch Voraussetzung 5.2.4 (ii) erfüllt. Mit einer Einbettungskonstanten $c > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
k \sum_{l=1}^N \phi_0^{l-1} &= k \sum_{l=0}^{N-1} F(\varepsilon_0(x_l)) \leq k \sum_{l=0}^{N-1} |F(\varepsilon_0(x_l))| \\
&\leq wk \sum_{l=0}^{N-1} (\varepsilon_0(x_l))^p \leq w \max_{0 \leq l \leq N-1} \{|\varepsilon_0(x_l)|^p\} \\
&\leq w \|\varepsilon_0\|_{C([0,1])}^p \leq c^p w \|\varepsilon_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^p.
\end{aligned}$$

(iv) Erfüllen $(\tilde{\mathcal{H}}_1^\delta, \tilde{\mathcal{F}}_1^\delta)$ und $(\tilde{\mathcal{H}}_2^\delta, \tilde{\mathcal{F}}_2^\delta)$, $\delta \geq 0$, die Voraussetzung 5.2.4, dann erfüllt sie auch jede Linearkombination $(\alpha \tilde{\mathcal{H}}_1^\delta + \beta \tilde{\mathcal{H}}_2^\delta, \alpha \tilde{\mathcal{F}}_1^\delta + \beta \tilde{\mathcal{F}}_2^\delta)$, $\delta \geq 0$, für nichtnegative α, β .

Satz 5.2.8 *Es sei die Voraussetzung 5.2.4 erfüllt. Dann gibt es eine positive Konstante $C(v_0, \varepsilon_0, g, E, T)$, so daß für jedes der Probleme (D_A) , (D_B) und (D_C) unabhängig von der Wahl der Diskretisierungsparameter N , M und δ gilt*

$$\max_{1 \leq m \leq M} \left(k \sum_{l=1}^N (v_m^l)^2 + k \sum_{l=1}^N \phi_m^{l-1} \right) \leq C(v_0, \varepsilon_0, g, E, T).$$

Beweis:

Multiplikation der Gleichung (3.32) mit v_m^l und Summation über $l = 1, \dots, N$ liefert

$$\sum_{l=1}^N \left(\frac{v_m^l - v_{m-1}^l}{h} - \frac{\sigma_m^l - \sigma_m^{l-1}}{k} - g_m^l \right) v_m^l = 0.$$

Daraus folgt

$$\sum_{l=1}^N \left(\frac{1}{2h} \left((v_m^l)^2 - (v_{m-1}^l)^2 \right) - (D_k \sigma_m^l + g_m^l) v_m^l \right) = -\frac{1}{2h} \sum_{l=1}^N (v_m^l - v_{m-1}^l)^2 \leq 0. \tag{5.18}$$

Sei $1 \leq i \leq M$. Durch Summation der Ungleichung (5.18) über $m = 1, \dots, i$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &\geq \sum_{m=1}^i \sum_{l=1}^N \left(\frac{1}{2h} \left((v_m^l)^2 - (v_{m-1}^l)^2 \right) - (D_k \sigma_m^l + g_m^l) v_m^l \right) \\ &= \frac{1}{2h} \sum_{l=1}^N \left((v_i^l)^2 - (v_0^l)^2 \right) - \sum_{m=1}^i \sum_{l=1}^N (D_k \sigma_m^l + g_m^l) v_m^l. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Wird Gleichung (3.33) mit σ_m^l multipliziert und das Ergebnis über $l = 0, \dots, N-1$ summiert, dann ergibt sich mit der diskreten partiellen Integrations-Formel (5.5) und den Randbedingungen (3.37), (3.38) bzw. (3.39) die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \sum_{l=0}^{N-1} (\varepsilon_m^l - \varepsilon_{m-1}^l) \sigma_m^l &= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{N-1} (v_m^{l+1} - v_m^l) \sigma_m^l \\ &= -\frac{1}{k} \sum_{l=1}^{N-1} v_m^l (\sigma_m^l - \sigma_m^{l-1}) + \frac{1}{k} \sigma_m^{N-1} v_m^N - \frac{1}{k} \sigma_m^0 v_m^0 \\ &\stackrel{RB}{=} -\frac{1}{k} \sum_{l=1}^{N-1} v_m^l (\sigma_m^l - \sigma_m^{l-1}) - \frac{1}{k} (\sigma_m^N - \sigma_m^{N-1}) v_m^N \\ &= -\frac{1}{k} \sum_{l=1}^N v_m^l (\sigma_m^l - \sigma_m^{l-1}). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Wegen der Voraussetzung 5.2.4 folgt aus (5.20)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{k} \sum_{l=1}^N v_m^l (\sigma_m^l - \sigma_m^{l-1}) + \frac{1}{h} \sum_{l=0}^{N-1} (\varepsilon_m^l - \varepsilon_{m-1}^l) \sigma_m^l \\ &\geq \frac{1}{k} \sum_{l=1}^N v_m^l (\sigma_m^l - \sigma_m^{l-1}) + \frac{1}{h} \sum_{l=0}^{N-1} (\phi_m^l - \phi_{m-1}^l). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Sei $1 \leq i \leq M$. Summation von Ungleichung (5.21) über $m = 1, \dots, i$ ergibt

$$0 \geq \sum_{m=1}^i \sum_{l=1}^N (D_k \sigma_m^l) v_m^l + \frac{1}{h} \sum_{l=0}^{N-1} (\phi_i^l - \phi_0^l). \quad (5.22)$$

Addition von (5.19) und (5.22) liefert

$$\frac{1}{2h} \sum_{l=1}^N (v_i^l)^2 + \frac{1}{h} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_i^l \leq \frac{1}{2h} \sum_{l=1}^N (v_0^l)^2 + \frac{1}{h} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_0^l + \sum_{m=1}^i \sum_{l=1}^N g_m^l v_m^l. \quad (5.23)$$

Für jedes $m \in \{1, \dots, i\}$ und $\epsilon > 0$ gilt wegen der Youngschen Ungleichung

$$\sum_{l=1}^N g_m^l v_m^l \leq \frac{1}{2} \epsilon \sum_{l=1}^N (g_m^l)^2 + \frac{1}{2\epsilon} \sum_{l=1}^N (v_m^l)^2. \quad (5.24)$$

Seien $\epsilon_1 > 0$ und $\epsilon_2 > 0$. Aus (5.23) und (5.24) folgt mit Hilfe von Lemma 5.1.5

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2h} \sum_{l=1}^N \left((v_i^l)^2 + 2\phi_i^{l-1} \right) \\
& \leq \frac{1}{2h} \sum_{l=1}^N \left((v_0^l)^2 + 2\phi_0^{l-1} \right) + \frac{\epsilon_1}{2} \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{l=1}^N (g_m^l)^2 + \frac{1}{2\epsilon_1} \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{l=1}^N (v_m^l)^2 \\
& \quad + \frac{\epsilon_2}{2} \sum_{l=1}^N (g_i^l)^2 + \frac{1}{2\epsilon_2} \sum_{l=1}^N (v_i^l)^2 \\
& \leq \frac{1}{2h} \sum_{l=1}^N \left((v_0^l)^2 + 2\phi_0^{l-1} \right) + \frac{\epsilon_1}{2hk} \|g\|_{L^2((0,1) \times (0, (i-1)h))}^2 \\
& \quad + \frac{\epsilon_2}{2hk} \|g\|_{L^2((0,1) \times ((i-1)h, ih))}^2 + \frac{1}{2\epsilon_1} \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{l=1}^N (v_m^l)^2 + \frac{1}{2\epsilon_2} \sum_{l=1}^N (v_i^l)^2 \\
& \stackrel{\epsilon_1 = \frac{1}{2}, \epsilon_2 = 2h}{\leq} \frac{1}{2h} \sum_{l=1}^N \left((v_0^l)^2 + 2\phi_0^{l-1} \right) + \frac{1}{4hk} \|g\|_{L^2((0,1) \times (0, T))}^2 + \frac{1}{k} \|g\|_{L^2((0,1) \times (0, T))}^2 \\
& \quad + \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{l=1}^N (v_m^l)^2 + \frac{1}{4h} \sum_{l=1}^N (v_i^l)^2. \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Wegen der Anfangsbedingung (3.35), der Regularität der Anfangswerte und der Voraussetzung 5.2.4 gilt

$$\begin{aligned}
& 2k \sum_{l=1}^N \left((v_0^l)^2 + 2\phi_0^{l-1} \right) + (1 + 4h) \|g\|_{L^2((0,1) \times (0, T))}^2 \\
& \leq 2 \|v_0\|_{L^\infty(0,1)}^2 + 4E \left(\|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 + \|\varepsilon_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 \right) + (1 + 4T) \|g\|_{L^2((0,1) \times (0, T))}^2 \\
& =: C_0(v_0, \varepsilon_0, g, E, T).
\end{aligned}$$

Multiplikation von (5.25) mit $4hk$ ergibt

$$\begin{aligned}
s_i &:= k \sum_{l=1}^N \left((v_i^l)^2 + 4\phi_i^{l-1} \right) \\
&\leq 2k \sum_{l=1}^N \left((v_0^l)^2 + 2\phi_0^{l-1} \right) + (1 + 4h) \|g\|_{L^2((0,1) \times (0, T))}^2 + 4h \sum_{m=1}^{i-1} s_m \\
&\leq C_0(v_0, \varepsilon_0, g, E, T) + 4h \sum_{m=1}^{i-1} s_m.
\end{aligned}$$

Das diskrete Gronwall-Lemma liefert für jedes $i \in \{1, \dots, M\}$

$$\begin{aligned}
s_i &\leq C_0(v_0, \varepsilon_0, g, E, T) \exp(4hi) \leq C_0(v_0, \varepsilon_0, g, E, T) \exp(4T) \\
&=: C(v_0, \varepsilon_0, g, E, T).
\end{aligned}$$

Also läßt sich das Maximum der Energien s_m , $1 \leq m \leq M$, unabhängig von den Diskretisierungsparametern N , M und δ nach oben abschätzen durch

$$\max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N \left((v_m^l)^2 + 4\phi_m^{l-1} \right) = \max_{1 \leq m \leq M} s_m \leq C(v_0, \varepsilon_0, g, E, T).$$

□

5.3 Zweite Energieabschätzung

Die Idee aus der Form der Hysterese-Schleife eine weitere Energieabschätzung zu gewinnen stammt von Krejčí (vgl. [K86], [K93], [K96], [KSZ99]). Ist jeder Zweig des Hysterese-Operators \mathcal{H} zu einer beliebigen Vergangenheit $v \in C([0, t])$ im Intervall $[v(t), \infty)$ eine konkave und im Intervall $(-\infty, v(t)]$ eine konvexe Funktion, wie es in Voraussetzung 1 (iv) gefordert wird, und bildet der Hysterese-Operator den Raum der stetigen Funktionen in sich ab, dann gilt für Funktionen $\varepsilon \in W^{2,1}(0, T)$, für die $\sigma = \mathcal{H}[\varepsilon] \in W^{1,\infty}(0, T)$ ist, und für alle nichtnegativen Funktionen $w \in W_0^{1,1}(0, T)$ die folgende sogenannte Konvexitäts-Ungleichung (vgl. [BS96, Prop. 3.4.2]):

$$\int_0^T \left(\varepsilon_{tt}(t) \sigma_t(t) w(t) + \frac{1}{2} \varepsilon_t(t) \sigma_t(t) w_t(t) \right) dt \geq 0. \quad (5.27)$$

Die Gültigkeit der Konvexitäts-Ungleichung ist äquivalent zur Existenz eines nichtwachsenden Repräsentanten der Äquivalenzklasse $P(t)$ definiert durch

$$P(t) := - \int_0^t \varepsilon_{tt}(\tau) \sigma_t(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \varepsilon_t(t) \sigma_t(t). \quad (5.28)$$

Die zugehörigen Beweise finden sich in [KSZ99, Prop. 5.2].

Differenziert man die Gleichungen (3.1) und (3.2) jeweils nach t , testet die differenzierten Gleichungen mit v_t bzw. σ_t und integriert die Summe über das kartesische Produkt aus dem Ortsintervall $[0, 1]$ und dem Zeitintervall $[0, t]$, $0 < t \leq T$, dann läßt sich mit der Konvexitäts-Ungleichung in der Form (5.28) im Fall einer verschwindenden Kontrollfunktion g zeigen, daß das Energiefunktional zweiter Ordnung

$$E_2(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 \left(v_t^2(x, t) + \sigma_t(x, t) \varepsilon_t(x, t) \right) dx$$

auf Lösungen der Probleme (P_A) , (P_B) und (P_C) fast überall monoton fällt.

Diese zweite Energieabschätzung wird im folgenden auf das diskrete System übertragen. Die lokale starke Monotonie und die Lipschitz-Stetigkeit der Hysterese-Operatoren werden genutzt, um die diskreten $L^\infty(L^2)$ -Normen der diskreten Zeitableitungen aller drei Unbekannten unabhängig von den Diskretisierungsparametern nach oben abzuschätzen.

Definition 5.3.1 Seien $\varepsilon_m^l, \sigma_m^l, m \in \{-1, \dots, M\}, l \in \{0, \dots, N-1\}$, Lösungskomponenten der diskreten Probleme (D_A) , (D_B) bzw. (D_C) . Wir definieren den **lokalen Elastizitäts-Modul** ψ_m^l für $m \in \{-1, \dots, M-1\}, l \in \{0, \dots, N-1\}$ durch

$$\psi_m^l := \begin{cases} \frac{\sigma_{m+1}^l - \sigma_m^l}{\varepsilon_{m+1}^l - \varepsilon_m^l}, & \text{falls } \varepsilon_{m+1}^l \neq \varepsilon_m^l, \\ a, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (5.29)$$

wobei a die Monotonie-Konstante aus der Voraussetzung 1 aus dem Abschnitt 3.2 ist.

Bemerkung 5.3.2 Ist Voraussetzung 1 erfüllt, dann folgt aus Lemma 3.4.2 (iv), daß für eine streng monotone Input-Folge die zugehörige Folge der lokalen Elastizitäts-Module monoton fallend ist. Falls $\varepsilon_{m-1}^l < \varepsilon_m^l < \varepsilon_{m+1}^l$ oder $\varepsilon_{m-1}^l > \varepsilon_m^l > \varepsilon_{m+1}^l$ für ein $l \in \{0, \dots, N-1\}$ und $m \in \{0, \dots, M\}$ ist, dann ist also

$$\psi_{m-1}^l \geq \psi_m^l.$$

Ist der diskrete Hysterese-Operator ein Superpositions-Operator, d. h. gilt $\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta(v, x) = h(x)$ für eine Funktion h , wobei h die Voraussetzung 1 erfüllt, dann ist h affin. Denn nach Lemma 3.4.2 (iv) gilt für beliebige $x < y < z$

$$\frac{h(y) - h(x)}{y - x} \geq \frac{h(z) - h(y)}{z - y} = \frac{h(y) - h(z)}{y - z} \geq \frac{h(x) - h(y)}{x - y}.$$

Da die linke und die rechte Seite der Ungleichung übereinstimmen, muß Gleichheit zwischen allen Ausdrücken herrschen. Es existiert also eine Konstante c , die identisch ist mit dem Wert jedes Differenzenquotienten

$$\frac{h(y) - h(x)}{y - x} = c \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Also ist h affin. Bei dem betrachteten Gleichungssystem (3.32)-(3.34) handelt es sich in diesem Fall um eine Diskretisierung der linearen Wellengleichung.

In allen nichttrivialen Fällen, die Voraussetzung 1 erfüllen, muß es sich also um „echte“ Hysterese-Operatoren handeln, d. h. die Operatoren sind keine Superpositions-Operatoren.

Lemma 5.3.3 Es sei die Voraussetzung 1 aus dem Abschnitt 3.2 erfüllt. Dann gilt für den lokalen Elastizitäts-Modul $\Psi_m^l, l \in \{0, \dots, N-1\}, m \in \{-1, \dots, M-1\}$,

$$a \leq \psi_m^l \leq b,$$

mit den Konstanten a, b aus der Voraussetzung 1.

Beweis:

Nach Definition 5.3.1 gilt für $\varepsilon_{m+1}^l \neq \varepsilon_m^l$:

$$\begin{aligned} \psi_m^l &= \frac{\sigma_{m+1}^l - \sigma_m^l}{\varepsilon_{m+1}^l - \varepsilon_m^l} = \frac{\tilde{\mathcal{H}}((\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_{m+1}^l)) - \tilde{\mathcal{H}}((\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_m^l))}{\varepsilon_{m+1}^l - \varepsilon_m^l} \\ &= \left(\tilde{\mathcal{H}}((\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_{m+1}^l)) - \tilde{\mathcal{H}}((\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_m^l)) \right) (\varepsilon_{m+1}^l - \varepsilon_m^l)^{-2}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Wegen Lemma 3.4.2 (ii) folgt aus (5.30)

$$\psi_m^l \geq a.$$

Außerdem folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\tilde{\mathcal{H}}((\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_{m+1}^l)) - \tilde{\mathcal{H}}((\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_m^l)) \right) (\varepsilon_{m+1}^l - \varepsilon_m^l) \\ &= \left| \tilde{\mathcal{H}}((\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_{m+1}^l)) - \tilde{\mathcal{H}}((\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_m^l)) \right| |\varepsilon_{m+1}^l - \varepsilon_m^l|. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Wegen der Lipschitz-Stetigkeit im Sinne von Lemma 3.4.2 (iii) folgt aus (5.30) und (5.31) für $\varepsilon_{m+1}^l \neq \varepsilon_m^l$

$$\begin{aligned} \psi_m^l &= \left| \tilde{\mathcal{H}}((\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_{m+1}^l)) - \tilde{\mathcal{H}}((\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_m^l)) \right| |\varepsilon_{m+1}^l - \varepsilon_m^l|^{-1} \\ &= \left| \tilde{\mathcal{H}}((\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_{m+1}^l)) - \tilde{\mathcal{H}}((\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_m^l, \varepsilon_m^l)) \right| |\varepsilon_{m+1}^l - \varepsilon_m^l|^{-1} \leq b. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon_{m+1}^l = \varepsilon_m^l$ folgt die Aussage des Lemmas direkt aus der Definition von ψ_m^l . \square

Wir beweisen nun eine diskrete Version der Konvexitäts-Ungleichung, mit deren Hilfe im Satz 5.3.5 eine diskrete Energieabschätzung zweiter Ordnung hergeleitet wird.

Lemma 5.3.4 (diskrete Konvexitäts-Ungleichung) *Es sei die Voraussetzung 1 aus dem Abschnitt 3.2 erfüllt. Sei $0 \leq l \leq N-1$ und $0 \leq i \leq M-1$. Dann gilt für die Lösungen der Probleme (D_A) , (D_B) und (D_C) unabhängig von der Wahl der Diskretisierungsparameter N , M und δ die diskrete Konvexitäts-Ungleichung*

$$\sum_{m=0}^i D_h^2 \varepsilon_{m+1}^l D_h \sigma_{m+1}^l \geq \frac{\psi_i^l}{2h} (D_h \varepsilon_{i+1}^l)^2 - \frac{\psi_0^l}{2h} (D_h \varepsilon_0^l)^2 \geq \frac{a}{2h} (D_h \varepsilon_{i+1}^l)^2 - \frac{b}{2h} (D_h \varepsilon_0^l)^2,$$

wobei a und b die Monotonie- bzw. Lipschitz-Konstanten aus der Voraussetzung 1 sind.

Beweis:

Sei H die Heaviside-Funktion aus der Definition 2.3.8. Aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} &(D_h \varepsilon_{m+1}^l - D_h \varepsilon_m^l) D_h \varepsilon_{m+1}^l \\ &\geq \begin{cases} \frac{1}{2} (D_h \varepsilon_{m+1}^l)^2 - \frac{1}{2} (D_h \varepsilon_m^l)^2, & \text{falls } (D_h \varepsilon_m^l) (D_h \varepsilon_{m+1}^l) > 0 \\ \frac{1}{2} (D_h \varepsilon_{m+1}^l)^2, & \text{falls } (D_h \varepsilon_m^l) (D_h \varepsilon_{m+1}^l) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.32)$$

und der Tatsache, daß $D_h \sigma_{m+1}^l = 0$ ist, falls $D_h \varepsilon_{m+1}^l = 0$ ist sowie der Nichtnegativität

der ψ_m^l läßt sich für jedes $l \in \{0, \dots, N-1\}$ folgern

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^i D_h^2 \varepsilon_{m+1}^l D_h \sigma_{m+1}^l \\
& \stackrel{\text{Def. } \psi_m^l}{=} \sum_{m=0}^i D_h^2 \varepsilon_{m+1}^l D_h \varepsilon_{m+1}^l \psi_m^l \\
& = \frac{1}{h} \sum_{m=0}^i (D_h \varepsilon_{m+1}^l - D_h \varepsilon_m^l) D_h \varepsilon_{m+1}^l \psi_m^l \\
& \stackrel{(5.32)}{\geq} \frac{1}{2h} \sum_{m=0}^i \left((D_h \varepsilon_{m+1}^l)^2 - H(D_h \varepsilon_m^l D_h \varepsilon_{m+1}^l) (D_h \varepsilon_m^l)^2 \right) \psi_m^l \\
& = \frac{1}{2h} \sum_{m=1}^i \left((\psi_{m-1}^l - H(D_h \varepsilon_m^l D_h \varepsilon_{m+1}^l) \psi_m^l) (D_h \varepsilon_m^l)^2 \right) \\
& \quad + \frac{\psi_i^l}{2h} (D_h \varepsilon_{i+1}^l)^2 - \frac{\psi_0^l}{2h} H(D_h \varepsilon_0^l D_h \varepsilon_1^l) (D_h \varepsilon_0^l)^2 \\
& \geq \frac{\psi_i^l}{2h} (D_h \varepsilon_{i+1}^l)^2 - \frac{\psi_0^l}{2h} (D_h \varepsilon_0^l)^2.
\end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Abschätzung aus Lemma 3.4.2 (iv) und der Nichtnegativität der ψ_m^l nach Lemma 5.3.3, da gilt

$$\begin{aligned}
& \psi_{m-1}^l - H(D_h \varepsilon_m^l D_h \varepsilon_{m+1}^l) \psi_m^l \\
& = \begin{cases} \psi_{m-1}^l - \psi_m^l, & \text{falls } \varepsilon_{m+1}^l > \varepsilon_m^l > \varepsilon_{m-1}^l \text{ oder } \varepsilon_{m+1}^l < \varepsilon_m^l < \varepsilon_{m-1}^l \\ \psi_{m-1}^l, & \text{sonst} \end{cases} \geq 0.
\end{aligned}$$

Aus Lemma 5.3.3 folgt

$$\begin{aligned}
& \frac{\psi_i^l}{2h} (D_h \varepsilon_{i+1}^l)^2 - \frac{\psi_0^l}{2h} (D_h \varepsilon_0^l)^2 \\
& \geq \min\{\psi_m^l : m \in \{-1, \dots, i\}, l \in \{0, \dots, N-1\}\} \frac{1}{2h} (D_h \varepsilon_{i+1}^l)^2 \\
& \quad - \max\{\psi_m^l : m \in \{-1, \dots, i\}, l \in \{0, \dots, N-1\}\} \frac{1}{2h} (D_h \varepsilon_0^l)^2 \\
& \geq \frac{a}{2h} (D_h \varepsilon_{i+1}^l)^2 - \frac{b}{2h} (D_h \varepsilon_0^l)^2.
\end{aligned}$$

□

Satz 5.3.5 *Es sei die Voraussetzung 1 aus dem Abschnitt 3.2 erfüllt. Für das Verhältnis der Schrittweiten gelte $h = O(k)$. Dann existiert eine von der Wahl der Diskretisierungsparameter N , M und δ unabhängige positive Konstante $C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)$, so daß für die Lösungen der Probleme (D_A) , (D_B) und (D_C) gilt*

$$\max_{1 \leq m \leq M} \left(k \sum_{l=1}^N (D_h v_m^l)^2 + ak \sum_{l=1}^N (D_h \varepsilon_m^{l-1})^2 \right) \leq C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T).$$

Beweis:

Diskretes Differenzieren der Gleichung (3.32), d. h. Subtraktion der beiden folgenden Gleichungen und Multiplikation mit $\frac{1}{h}$, ergibt

$$\begin{aligned} D_h v_{m+1}^l - D_k \sigma_{m+1}^l &= g_{m+1}^l, \\ D_h v_m^l - D_k \sigma_m^l &= g_m^l, \\ \Rightarrow D_h^2 v_{m+1}^l - D_h D_k \sigma_{m+1}^l &= D_h g_{m+1}^l, \quad l = 1, \dots, N, \quad m = 0, \dots, M-1. \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird mit $D_h v_{m+1}^l$ multipliziert und über $l = 1, \dots, N$ summiert. Die linke Seite kann unter Ausnutzung der Gleichungen (5.4) und (5.6) und der Randbedingungen (3.37), (3.38) bzw. (3.39) nach unten abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h} \sum_{l=1}^N \left((D_h v_{m+1}^l)^2 - (D_h v_m^l)^2 \right) + \sum_{l=1}^N D_h \sigma_{m+1}^{l-1} D_k D_h v_{m+1}^l \\ &= \frac{1}{2h} \sum_{l=1}^N \left((D_h v_{m+1}^l)^2 - (D_h v_m^l)^2 \right) + \sum_{l=1}^N D_h \sigma_{m+1}^{l-1} D_k D_h v_{m+1}^l \\ & \quad + \frac{1}{k} D_h v_{m+1}^N D_h \sigma_{m+1}^N - \frac{1}{k} D_h v_{m+1}^0 D_h \sigma_{m+1}^0 \\ &\leq \sum_{l=1}^N D_h^2 v_{m+1}^l D_h v_{m+1}^l - \sum_{l=1}^N D_h D_k \sigma_{m+1}^l D_h v_{m+1}^l = \sum_{l=1}^N D_h g_{m+1}^l D_h v_{m+1}^l. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Entsprechend ergibt diskretes Differenzieren der Gleichung (3.33)

$$D_h^2 \varepsilon_{m+1}^{l-1} - D_h D_k v_{m+1}^l = 0, \quad l = 1, \dots, N, \quad m = 0, \dots, M-1.$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $D_h \sigma_{m+1}^{l-1}$ und Summation über $l = 1, \dots, N$ liefert

$$\sum_{l=1}^N D_h^2 \varepsilon_{m+1}^{l-1} D_h \sigma_{m+1}^{l-1} - \sum_{l=1}^N D_k D_h v_{m+1}^l D_h \sigma_{m+1}^{l-1} = 0. \tag{5.34}$$

Sei $0 \leq i \leq M-1$. Addition der Summe von (5.33) und (5.34) über $m = 0, \dots, i$ und Multiplikation mit $2hk$ ergibt

$$\begin{aligned} k \sum_{l=1}^N \left((D_h v_{i+1}^l)^2 - (D_h v_0^l)^2 \right) + 2hk \sum_{m=0}^i \sum_{l=1}^N D_h^2 \varepsilon_{m+1}^{l-1} D_h \sigma_{m+1}^{l-1} \\ \leq 2hk \sum_{m=0}^i \sum_{l=1}^N D_h g_{m+1}^l D_h v_{m+1}^l. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (3.32), (3.33) des Differenzen-Schemas, dem Lemma 5.1.12, der Anfangsbedingung (3.35), der Definition der g_0^l , $l \in \{1, \dots, N\}$, dem Lemma 5.1.7 und der Einbettungskonstante $c > 0$ zur stetigen Einbettung $W^{1,2}(0, T; L^2(0, 1)) \hookrightarrow$

$L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
& k \sum_{l=1}^N (D_h v_0^l)^2 + bk \sum_{l=1}^N (D_h \varepsilon_0^{l-1})^2 \\
& \stackrel{(3.32), (3.33)}{\leq} 2k \sum_{l=1}^N (D_k \sigma_0^l)^2 + 2k \sum_{l=1}^N (g_0^l)^2 + bk \sum_{l=1}^N (D_k v_0^l)^2 \\
& \stackrel{\text{Lem. 5.1.12, Def. } g_0^l}{\leq} D(v_0, \varepsilon_0, b, g) + \frac{2}{k} \sum_{l=1}^N \left(\int_{(l-1)k}^{lk} g(x, 0) dx \right)^2 + bk \sum_{l=1}^N (D_k v_0^l)^2 \\
& \stackrel{\text{Hölder, (3.35)}}{=} D(v_0, \varepsilon_0, b, g) + 2 \|g(x, 0)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{b}{k} \sum_{l=1}^N (v_0(x_l) - v_0(x_{l-1}))^2 \\
& \stackrel{\text{Lem. 5.1.7}}{\leq} D(v_0, \varepsilon_0, b, g) + 2 \|g\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}^2 + b \|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 \\
& \leq D(v_0, \varepsilon_0, b, g) + 2c \|g\|_{W^{1,2}(0,T;L^2(0,1))}^2 + b \|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 \\
& =: C_1(v_0, \varepsilon_0, b, g). \tag{5.36}
\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der diskreten Konvexitäts-Ungleichung aus Lemma 5.3.4 und der Abschätzung (5.36) ergibt sich aus (5.35) mit der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
& k \sum_{l=1}^N (D_h v_{i+1}^l)^2 + ak \sum_{l=1}^N (D_h \varepsilon_{i+1}^{l-1})^2 \\
& \leq k \sum_{l=1}^N (D_h v_0^l)^2 + bk \sum_{l=1}^N (D_h \varepsilon_0^{l-1})^2 + 2hk \sum_{m=0}^i \sum_{l=1}^N D_h g_{m+1}^l D_h v_{m+1}^l \\
& \stackrel{(5.36)}{\leq} C_1(v_0, \varepsilon_0, b, g) + 2hk \sum_{m=0}^i \sum_{l=1}^N D_h g_{m+1}^l D_h v_{m+1}^l \\
& \stackrel{\text{Young}}{\leq} C_1(v_0, \varepsilon_0, b, g) + 2hk \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=1}^N (D_h g_{m+1}^l)^2 + \frac{hk}{2} \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=1}^N (D_h v_{m+1}^l)^2 \\
& \quad + 2h^2 k \sum_{l=1}^N (D_h g_{i+1}^l)^2 + \frac{k}{2} \sum_{l=1}^N (D_h v_{i+1}^l)^2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit der positiven Konstanten

$$C_2(v_0, \varepsilon_0, b, g) = C_1(v_0, \varepsilon_0, b, g) + 4 \|g\|_{W^{1,2}(-h, (i+1)h; L^2(0,1))}^2$$

$$\begin{aligned}
s_{i+1} & := \frac{k}{2} \sum_{l=1}^N (D_h v_{i+1}^l)^2 + ak \sum_{l=1}^N (D_h \varepsilon_{i+1}^{l-1})^2 \\
& \stackrel{\text{Lem. 5.1.6}}{\leq} C_1(v_0, \varepsilon_0, b, g) + 4 \|g\|_{W^{1,2}(-h, (i+1)h; L^2(0,1))}^2 + h \sum_{m=1}^i s_m
\end{aligned}$$

$$= C_2(v_0, \varepsilon_0, b, g) + h \sum_{m=1}^i s_m. \quad (5.37)$$

Nach dem diskreten Lemma von Gronwall ergibt sich daraus

$$s_{i+1} \leq C_2(v_0, \varepsilon_0, b, g) \exp(h(i+1)) \stackrel{h(i+1) \leq T}{\leq} C_2(v_0, \varepsilon_0, b, g) \exp(T).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq m \leq M} s_m &= \max_{1 \leq m \leq M} \left(\frac{k}{2} \sum_{l=1}^N (D_h v_m^l)^2 + ak \sum_{l=1}^N (D_h \varepsilon_m^{l-1})^2 \right) \\ &\leq C_2(v_0, \varepsilon_0, b, g) \exp(T) \\ &=: C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) \quad \text{unabhängig von } N, M \text{ und } \delta. \end{aligned}$$

□

Aus dem Satz 5.3.5 lassen sich direkt die beiden folgenden Korollare folgern.

Korollar 5.3.6 *Es sei die Voraussetzung 1 aus dem Abschnitt 3.2 erfüllt. Für das Verhältnis der Schrittweiten gelte $h = O(k)$. Dann existieren von den Diskretisierungsparametern N , M und δ unabhängige positive Konstanten $C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)$, $C_1(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)$, so daß für die Lösungen der Probleme (D_A) , (D_B) und (D_C) gilt*

$$\max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (D_k \sigma_m^l)^2 \leq C_1(v_0, \varepsilon_0, b, g, T), \quad (5.38)$$

$$\max_{1 \leq m \leq M} \frac{a}{b^2} k \sum_{l=1}^N (D_h \sigma_m^{l-1})^2 \leq C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T). \quad (5.39)$$

Beweis:

Zur 1. Abschätzung: Nach Satz 5.3.5 und Gleichung (3.32) des Differenzen-Schemas gilt unabhängig von den Diskretisierungsparametern N , M und δ

$$\max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (D_k \sigma_m^l + g_m^l)^2 = \max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (D_h v_m^l)^2 \leq C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T).$$

Für jedes $m \in \{1, \dots, M\}$ folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} k \sum_{l=1}^N (D_k \sigma_m^l)^2 &\leq k \sum_{l=1}^N (D_k \sigma_m^l)^2 + k \sum_{l=1}^N (g_m^l)^2 \\ &\leq C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) - 2k \sum_{l=1}^N (D_k \sigma_m^l) g_m^l \\ &\leq C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) + 2k \sum_{l=1}^N |D_k \sigma_m^l| |g_m^l| \\ &\leq C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) + 2k \left(\sum_{l=1}^N (D_k \sigma_m^l)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l=1}^N (g_m^l)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$k \left(\left(\sum_{l=1}^N (D_k \sigma_m^l)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{l=1}^N (g_m^l)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) + k \sum_{l=1}^N (g_m^l)^2.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} k \sum_{l=1}^N (D_k \sigma_m^l)^2 &\leq 2 \left(C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) + k \sum_{l=1}^N (g_m^l)^2 \right) + 2k \sum_{l=1}^N (g_m^l)^2 \\ &= 2C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) + 4k \sum_{l=1}^N \left(\frac{1}{hk} \int_{(m-1)h}^{mh} \int_{(l-1)k}^{lk} g(x, t) dx dt \right)^2 \\ &\leq 2C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) + \frac{4}{h} \sum_{l=1}^N \left(\int_{(m-1)h}^{mh} \int_{(l-1)k}^{lk} g^2(x, t) dx dt \right) \\ &\leq 2C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) + 4 \sup_{t \in [0, T]} \int_0^1 g^2(x, t) dx dt \\ &= 2C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) + 4 \|g\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, 1))}^2 \\ &=: C_1(v_0, \varepsilon_0, b, g, T). \end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung für jedes $m \in \{1, \dots, M\}$ gilt, gilt sie auch für das Maximum. Dies liefert die gewünschte Abschätzung.

Zur 2. Abschätzung: Die Abschätzung (5.39) folgt direkt aus dem Satz 5.3.5 mit der dort eingeführten Konstante $C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)$ und dem Lemma 5.3.3, wenn man berücksichtigt, daß $D_h \sigma_m^l = 0$ genau dann gilt, wenn $D_h \varepsilon_m^l = 0$ ist. Dies ergibt sich direkt aus dem Lemma 3.4.2. \square

Korollar 5.3.7 *Es sei die Voraussetzung 1 aus Abschnitt 3.2 erfüllt. Für das Verhältnis der Schrittweiten gelte $h = O(k)$. Dann existieren von den Diskretisierungsparametern N , M und δ unabhängige positive Konstanten $C_2(v_0, \varepsilon_0, a, b, g, T)$, $C_3(v_0, \varepsilon_0, a, b, g, T)$ und $C_4(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)$, so daß für die Lösungen der Probleme (D_A) , (D_B) und (D_C) gilt*

$$\max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (\sigma_m^{l-1})^2 \leq \max_{1 \leq m \leq M, 1 \leq l \leq N} (\sigma_m^{l-1})^2 \leq C_2(v_0, \varepsilon_0, a, b, g, T), \quad (5.40)$$

$$\max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (v_m^l)^2 \leq \max_{1 \leq m \leq M, 1 \leq l \leq N} (v_m^l)^2 \leq C_3(v_0, \varepsilon_0, a, b, g, T), \quad (5.41)$$

$$\max_{1 \leq m \leq M} ak \sum_{l=1}^N (\varepsilon_m^{l-1})^2 \leq C_4(v_0, \varepsilon_0, b, g, T). \quad (5.42)$$

Beweis:

Zu Abschätzung (5.40): Das Korollar 5.3.6 und das Lemma 5.1.11 liefern die folgenden

von den Diskretisierungsparametern N , M und δ unabhängigen Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^{N-1} (D_h \sigma_m^l)^2 &\leq \frac{b^2}{a} C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) =: D(v_0, \varepsilon_0, a, b, g, T), \\ \max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^{N-1} (D_k \sigma_m^l)^2 &\leq C_1(v_0, \varepsilon_0, b, g, T), \\ k \left| \sum_{l=1}^{N-1} \sigma_0^l \right| &\leq k \sum_{l=1}^{N-1} |\sigma_0^l| \leq \left(2b^2 \|\varepsilon_0\|_{C([0,1])}^2 + 2b^2 T^2 \|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} =: D_1(v_0, \varepsilon_0, b, T). \end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen des diskreten Einbettungssatzes 5.1.9 erfüllt und es folgt unabhängig von der Wahl der Diskretisierungsparameter N , M und δ

$$\begin{aligned} &\max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=0}^{N-1} (\sigma_m^l)^2 \\ &\leq \max_{1 \leq m \leq M, 0 \leq l \leq N-1} (\sigma_m^l)^2 \\ &\leq \left(D_1(v_0, \varepsilon_0, b, T) + T \left(\frac{b^2}{a} C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) \right)^{\frac{1}{2}} + C_1(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &=: C_2(v_0, \varepsilon_0, a, b, g, T). \end{aligned} \tag{5.43}$$

Zu Abschätzung (5.41): Der Satz 5.3.5 in Verbindung mit der Gleichung (3.33) des Differenzen-Schemas, sowie die Anfangsbedingung (3.36) und die Regularität von v_0 liefern die folgenden von den Diskretisierungsparametern N , M und δ unabhängigen Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (D_h v_m^l)^2 &\leq C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T), \\ \max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (D_k v_m^l)^2 &\leq \frac{1}{a} C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T), \\ k \left| \sum_{l=1}^N v_0^l \right| &\leq k \sum_{l=1}^N |v_0(x_l)| \leq \|v_0\|_{C([0,1])}. \end{aligned}$$

Mit dem diskreten Einbettungssatz 5.1.9 läßt sich daraus bei beliebiger Wahl der Diskretisierungsparameter N , M und δ folgern

$$\begin{aligned} &\max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (v_m^l)^2 \\ &\leq \max_{1 \leq m \leq M, 1 \leq l \leq N} (v_m^l)^2 \\ &\leq \left(\|v_0\|_{C([0,1])} + TC(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{a} C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &=: C_3(v_0, \varepsilon_0, a, b, g, T). \end{aligned}$$

Zu Abschätzung (5.42): Der diskrete Einbettungssatz 5.1.9 läßt sich nicht anwenden, da die Bedingung (5.8) nicht vorausgesetzt werden kann. Nach dem Lemma 5.1.10, dem Satz 5.3.5, der Anfangsbedingung (3.36) und der Regularität von ε_0 gibt es eine positive Konstante $C_4(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)$, so daß die folgende Abschätzung unabhängig von der Wahl der Diskretisierungsparameter N , M und δ gilt:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq m \leq M} ak \sum_{l=1}^N (\varepsilon_m^{l-1})^2 &\leq 2ak \sum_{l=1}^N (\varepsilon_0^{l-1})^2 + 2aT^2 \max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (D_h \varepsilon_m^{l-1})^2 \\ &\leq 2b \|\varepsilon_0\|_{C([0,1])}^2 + 2T^2 C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) \\ &=: C_4(v_0, \varepsilon_0, b, g, T). \end{aligned}$$

□

Kapitel 6

Grenzübergang

In diesem Kapitel wird gezeigt, in welchem Sinne die Lösungen der diskreten Probleme (D_A) , (D_B) bzw. (D_C) aus dem Abschnitt 3.4 gegen eine Lösung des jeweiligen zugehörigen kontinuierlichen Problems (P_A) , (P_B) bzw. (P_C) aus dem Abschnitt 3.1 konvergieren, falls der Hysterese-Operator \mathcal{H} bestimmte Kombinationen von Voraussetzungen aus dem Abschnitt 3.2 erfüllt.

Nach der Zusammenstellung von Hilfsmitteln im Abschnitt 6.1 folgt im Abschnitt 6.2 ein Konvergenzsatz, der Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Probleme (P_A) , (P_B) und (P_C) und zur Konvergenz der Differenzenverfahren der zugehörigen diskreten Probleme (D_A) , (D_B) und (D_C) enthält. Im Abschnitt 6.3 findet sich eine Fehlerabschätzung der Ordnung $1/2$ für jedes der betrachteten Probleme (P_A) , (P_B) und (P_C) . Außerdem wird eine Aussage zur stetigen Abhängigkeit der Lösung von den Daten getroffen.

Die klassischen Funktionenräumen, die zur Behandlung instationärer Probleme, also solcher Probleme die durch sogenannte Evolutionsgleichungen beschrieben werden, verwendet werden, enthalten Funktionen, die jedem Punkt t des betrachteten Zeitintervalls eine Funktion der Orte zuordnen. Im Gegensatz dazu bestehen der Definitions- und Wertebereich der im Abschnitt 2.7 eingeführten ortsabhängigen (Hysterese-)Operatoren aus Funktionen, die jedem Ortspunkt x eine Funktion der Zeit zuordnen. Da in unserem eindimensionalen Problem der Ortsraum ebenfalls ein Intervall ist, läßt sich die Rolle von Ort und Zeit in der Theorie von Banach-Raumwertigen Funktionenräumen auf Intervallen (siehe dazu Anhang A) vertauschen. Mit Hilfe der Lemmata A.0.17 und A.0.18 lassen sich Zeitfunktionen mit Ortsfunktionen und umgekehrt auf eine Weise miteinander identifizieren, in der die Theorien der Evolutionsgleichungen und der Hysterese-Operatoren im Fall der in dieser Arbeit betrachteten eindimensionalen Wellengleichung ineinandergreifen. Dies wird in den Beweisen des Konvergenzsatzes 6.2.3 und der Fehlerabschätzung 6.3.1 genutzt.

6.1 Hilfsmittel

In diesem Abschnitt findet sich eine Konvergenzaussage sowie Definitionen und Bemerkungen zu ortsabhängigen (Hysterese-)Operatoren. Diese Resultate werden wir in den beiden folgenden Abschnitten benutzen.

Lemma 6.1.1 *Es gelte*

$$\begin{aligned}\varepsilon^K &\xrightarrow{*} \varepsilon \quad \text{in } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \text{ für } K \rightarrow \infty, \\ \varepsilon_t^K &\xrightarrow{*} \varepsilon_t \quad \text{in } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \text{ für } K \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Dann folgt

$$\varepsilon^K(\cdot, 0) \rightharpoonup \varepsilon(\cdot, 0) \quad \text{in } L^2(0, 1) \text{ für } K \rightarrow \infty.$$

Beweis:

Seien $\varphi \in L^2(0, 1)$, $\eta \in L^2(0, T)$. Mit Hilfe des Satzes von Fubini läßt sich folgern

$$\begin{aligned}& \int_0^1 (\varepsilon^K(x, 0) - \varepsilon(x, 0)) \varphi(x) dx \int_0^T \eta(t) dt \\&= \int_0^T \int_0^1 (\varepsilon^K(x, 0) - \varepsilon(x, 0)) \varphi(x) \eta(t) dx dt \\&= \int_0^T \int_0^1 (\varepsilon^K(x, 0) - \varepsilon^K(x, t) + \varepsilon^K(x, t) - \varepsilon(x, t) + \varepsilon(x, t) - \varepsilon(x, 0)) \varphi(x) \eta(t) dx dt \\&= \int_0^T \int_0^1 \left(\int_0^t (\varepsilon_t(x, \tau) - \varepsilon_t^K(x, \tau)) d\tau \right) \varphi(x) \eta(t) dx dt \\&\quad + \int_0^T \int_0^1 (\varepsilon^K(x, t) - \varepsilon(x, t)) \varphi(x) \eta(t) dx dt \\&= \int_0^1 \int_0^T (\varepsilon_t(x, \tau) - \varepsilon_t^K(x, \tau)) \left(\int_\tau^T \eta(t) dt \right) \varphi(x) d\tau dx \\&\quad + \int_0^T \int_0^1 (\varepsilon^K(x, t) - \varepsilon(x, t)) \varphi(x) \eta(t) dx dt \\&\rightarrow 0 \quad \text{für } K \rightarrow \infty\end{aligned}$$

wegen der schwach*-Konvergenz nach Voraussetzung. Dies liefert die Behauptung. \square

Definition 6.1.2 Für jede Funktion $\varepsilon \in L^2(0, 1; C([0, T]))$ und für jedes $\delta \geq 0$ definieren wir den **ortsabhängigen Hysterese-Operator** \mathfrak{H}^δ punktweise wie in Definition 2.7.1:

$$\mathfrak{H}^\delta[\varepsilon](x) := \mathcal{H}^\delta[\varepsilon(x)] \quad \text{für } x \in [0, 1].$$

Bemerkung 6.1.3 Nach Korollar 2.7.5 ist der Operator \mathfrak{H}^δ , $\delta \geq 0$, eine stetige Abbildung des Banach-Raums $L^2(0, 1; C([0, T]))$ in sich. Nach Lemma A.0.18 ist der Raum $L^2(0, 1; C([0, T]))$ stetig eingebettet in den Banach-Raum $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$. Die Ortsfunktion $\mathfrak{H}[\varepsilon]$ läßt sich also mit einer Zeitfunktion aus $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ identifizieren.

Aus dem Einbettungslemma A.0.18 und der Fehlerabschätzung (3.27) folgt für jedes $\varepsilon \in L^2(0, 1; C([0, T]))$ und $\delta \geq 0$

$$\begin{aligned} & \|\mathfrak{H}[\varepsilon] - \mathfrak{H}^\delta[\varepsilon]\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, 1))} \leq \|\mathfrak{H}[\varepsilon] - \mathfrak{H}^\delta[\varepsilon]\|_{L^2(0, 1; C([0, T]))} \\ & = \left(\int_0^1 \sup_{t \in [0, T]} |\mathcal{H}[\varepsilon(x, \cdot)](t) - \mathcal{H}^\delta[\varepsilon(x, \cdot)](t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq c\delta. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Definition 6.1.4 Zu dem Operator $\mathcal{V}^\delta : [W^{1,2}(0, T)]^2 \rightarrow W^{1,1}(0, T)$, $\delta \geq 0$, aus der Voraussetzung 2 aus dem Abschnitt 3.2 definieren wir für $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in L^2(0, 1; [W^{1,2}(0, T)]^2)$ den ortsabhängigen Operator

$$\mathfrak{V}^\delta[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x) := \mathcal{V}^\delta[\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x)].$$

Bemerkung 6.1.5 Der Operator \mathfrak{V}^δ , $\delta \geq 0$, bildet $L^2(0, 1; [W^{1,2}(0, T)]^2)$ nach Satz 2.7.3 stetig in $L^2(0, 1; W^{1,1}(0, T))$ ab, falls die Voraussetzung 2 erfüllt ist. Wir führen die folgende Notation ein:

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}[\varepsilon_1, \varepsilon_2] &:= \mathfrak{V}^0[\varepsilon_1, \varepsilon_2], \\ \mathfrak{V}[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x, t) &:= \mathfrak{V}[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x)(t), \\ \mathfrak{V}^\delta[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x, t) &:= \mathfrak{V}^\delta[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x)(t), \quad \delta \geq 0. \end{aligned}$$

6.2 Konvergenz

Im folgenden führen wir den Grenzübergang durch. Wir setzen voraus, daß die Diskretisierungsparameter N , M und δ des Finite-Differenzen-Schemas aus Abschnitt 3.4 als Funktionen von $K \in \mathbb{N}$, gegeben sind. Dann sind auch die Schrittweiten $h = h(K) = \frac{T}{M(K)}$ und $k = k(K) = \frac{1}{N(K)}$ Funktionen von K .
Für

$$x \in \begin{cases} [x_{l-1}, x_l], & \text{falls } l \in \{1, \dots, N(K) - 1\}, \\ [x_{l-1}, x_l], & \text{falls } l = N(K), \end{cases}$$

und

$$t \in \begin{cases} [t_{m-1}, t_m], & \text{falls } m \in \{0, \dots, M(K) - 1\}, \\ [t_{m-1}, t_m], & \text{falls } m = M(K), \end{cases}$$

definieren wir die Interpolierenden der Lösung des diskreten Problems (D_A) , (D_B) bzw. (D_C) zum Diskretisierungsparameter K .

$$\begin{aligned} \hat{v}^K(x, t) &:= v_{m-1}^l + \frac{t - t_{m-1}}{h} (v_m^l - v_{m-1}^l), \\ \tilde{v}^K(x, t) &:= v_m^{l-1} + \frac{x - x_{l-1}}{k} (v_m^l - v_m^{l-1}), \\ \bar{v}^K(x, t) &:= v_m^l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}^K(x, t) &:= \varepsilon_{m-1}^{l-1} + \frac{t - t_{m-1}}{h} (\varepsilon_m^{l-1} - \varepsilon_{m-1}^{l-1}), \\
\bar{\varepsilon}^K(x, t) &:= \varepsilon_m^{l-1}, \\
\hat{\sigma}^K(x, t) &:= \begin{cases} \sigma_{m-1}^{l-1} + \frac{x - x_{l-1}}{k} (\sigma_{m-1}^l - \sigma_{m-1}^{l-1}) + \frac{t - t_{m-1}}{h} (\sigma_m^{l-1} - \sigma_{m-1}^{l-1}) \\ \quad + \frac{x - x_{l-1}}{k} \frac{t - t_{m-1}}{h} (\sigma_{m-1}^{l-1} + \sigma_m^l - \sigma_{m-1}^l - \sigma_m^{l-1}) & \text{für } x \in [x_{l-1}, x_l], \\ & 1 \leq l \leq N-1, \\ \sigma_{m-1}^{N-1} + \frac{t - t_{m-1}}{h} (\sigma_m^{N-1} - \sigma_{m-1}^{N-1}) & \text{für } x \in [x_{N-1}, x_N], \end{cases} \\
\hat{\sigma}^K(x, t) &:= \sigma_{m-1}^{l-1} + \frac{t - t_{m-1}}{h} (\sigma_m^{l-1} - \sigma_{m-1}^{l-1}), \\
\bar{\sigma}^K(x, t) &:= \sigma_m^{l-1} + \frac{x - x_{l-1}}{k} (\sigma_m^l - \sigma_m^{l-1}), \\
\bar{\sigma}^K(x, t) &:= \sigma_m^{l-1}, \\
g^K(x, t) &:= g_m^l.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Die Interpolierenden sind also Funktionen mit Definitionsbereich $[0, 1] \times [-h, T]$. Die Einschränkung jeder dieser Funktionen auf $[0, 1] \times [0, T]$ wird wieder mit demselben Funktionssymbol bezeichnet. Es ergibt sich jeweils aus dem Zusammenhang, welche Funktion gemeint ist.

Bemerkung 6.2.1 Da die Inputs $\varepsilon = (\varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_m)$ der diskreten Hysteresse-Operatoren in unserem numerischen Schema als erste Komponente einen Wert aus der Zeitschicht $-h$ führen, die Definition der (kontinuierlichen) Hysteresse-Operatoren aber auf dem Zeitintervall $[0, T]$ arbeitet, müssen im folgenden Shiftoperatoren $\tau_h(t) := t - h$ verwendet werden, um den Übergang von den diskreten zu den kontinuierlichen Operatoren zu ermöglichen.

Lemma 6.2.2 *Es sei die Voraussetzung 1 aus dem Abschnitt 3.2 erfüllt. Sei $\tau_h(t) := t - h$. Sei $\tilde{\mathcal{H}}_f^\delta$, die aus $\mathcal{H}^\delta : C([0, T]) \rightarrow C([0, T])$ generierte Endauswertung des diskreten Hysteresse-Operators, also $\mathcal{H}^\delta[\hat{\varepsilon}^K(x_l, \cdot) \circ \tau_h](t_{m+1}) = \tilde{\mathcal{H}}_f^\delta((\varepsilon_{-1}^l, \dots, \varepsilon_m^l))$, $-1 \leq m < M$, $0 \leq l < N$. Dann existiert eine Transformation $\alpha^K : [0, 1] \times [0, T] \rightarrow [0, T]$, wobei $\alpha^K(x, \cdot)$ für jedes $x \in [0, 1]$ eine stetige, nichtfallende und surjektive Funktion ist, mit $\alpha^K(x, t_m) = t_m$ für $0 \leq m \leq M$, so daß für jedes K gilt*

$$\hat{\sigma}^K(x, \alpha^K(x, t)) = \mathcal{H}^\delta[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot) \circ \tau_h](t + h).$$

Beweis:

Da $\hat{\varepsilon}^K(x, t)$ in x stückweise konstant und in t stückweise monoton und stetig ist, der Zeitoperator \mathcal{H}^δ lokal monoton, d. h. $(\mathcal{H}^\delta[\varepsilon])_t \varepsilon_t \geq 0$, ist und $C([0, T])$ Lipschitz-stetig in sich abbildet, ist auch die Funktion $\sigma^K(x, t - h) := \mathcal{H}^\delta[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot) \circ \tau_h](t)$ stückweise konstant in x und stückweise monoton und stetig in t . Nach Definition ist $\hat{\sigma}^K(x, \cdot)$ stückweise affin und stetig und es gilt $\hat{\sigma}^K(x, t_m) = \sigma^K(x, t_m)$ für $-1 \leq m \leq M$.

Wir definieren die stetige, nichtfallende und surjektive Transformation $\alpha^{l,K} : [0, T] \rightarrow [0, T]$ für festes $x \in [x_l, x_{l+1})$, $0 \leq l \leq N-1$, $t \in [t_m, t_{m+1})$, $m = 0, \dots, M-1$ durch

$$\alpha^{l,K}(t) := \begin{cases} \hat{\sigma}^K(x, t)^{-1} \circ \sigma^K(x, t), & \text{falls } \hat{\sigma}^K(x, t_m) \neq \hat{\sigma}^K(x, t_{m+1}), \\ t, & \text{falls } \hat{\sigma}^K(x, t_m) = \hat{\sigma}^K(x, t_{m+1}). \end{cases}$$

Für alle $m = 0, \dots, M$ gilt: $\alpha^{l,K}(t_m) = t_m$. Für $x \in [x_l, x_{l+1})$, $l = 0, \dots, N-1$, sei $\alpha^K(x, t) := \alpha^{l,K}(t)$. Diese Funktion besitzt alle gewünschten Eigenschaften. \square

Sei α^K die in Lemma 6.2.2 erklärte Transformation. Aufgrund der Gleichungen (3.32) - (3.34) des Finite-Differenzen-Schemas gilt

$$\hat{v}_t^K = \tilde{\sigma}_x^K + g^K, \quad (6.3)$$

$$\hat{\varepsilon}_t^K = \tilde{v}_x^K, \quad (6.4)$$

$$\hat{\sigma}^K(x, \alpha^K(x, t)) = \mathcal{H}^{\delta(K)}[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot) \circ \tau_h](t + h) \quad \text{für fast alle } (x, t) \in (0, 1) \times (0, T). \quad (6.5)$$

Der folgende Satz enthält Aussagen zur Konvergenz des Differenzenverfahrens zu jedem der diskreten Probleme (D_A) , (D_B) bzw. (D_C) aus Abschnitt 3.4, und damit zur Existenz von Lösungen der zugehörigen kontinuierlichen Probleme (P_A) , (P_B) bzw. (P_C) sowie zu deren Eindeutigkeit.

Satz 6.2.3 *Es seien die Voraussetzung 1 sowie die Voraussetzung 2 oder 2* aus dem Abschnitt 3.2 erfüllt. Sei $K \in \mathbb{N}$. Seien $M, N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit*

$$M(K), N(K) \rightarrow \infty \quad \text{für } K \rightarrow \infty,$$

$$N(K) < \frac{M(K)}{2T\sqrt{b}} \quad \text{für die in Voraussetzung 1 definierte Konstante } b$$

$$\text{und } \delta(K) \rightarrow 0 \quad \text{für } K \rightarrow \infty.$$

Dann besitzt jedes der Probleme (P_A) , (P_B) und (P_C) eine Lösung $(v, \sigma, \varepsilon) \in V \times V \times W$. Für diese gilt

$$v, \sigma \in C([0, 1] \times [0, T]),$$

$$\text{und im Fall von Voraussetzung 2* auch } \varepsilon \in C([0, 1] \times [0, T]),$$

wobei die folgenden Konvergenzen, zumindest für eine Teilfolge, zur Vereinfachung behalten wir die bisherige Indizierung bei, gelten:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{v}^K \rightarrow v, \bar{\sigma}^K \rightarrow \sigma \\ \hat{\varepsilon}^K \xrightarrow{*} \varepsilon, \hat{\varepsilon}_t^K \xrightarrow{*} \varepsilon_t, \\ \hat{v}_t^K \xrightarrow{*} v_t, \tilde{v}_x^K \xrightarrow{*} v_x, \\ \hat{\sigma}_t^K \xrightarrow{*} \sigma_t, \tilde{\sigma}_x^K \xrightarrow{*} \sigma_x \end{array} \right\} \quad \text{in } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \quad \text{für } K \rightarrow \infty,$$

Ist Voraussetzung 2 aus Abschnitt 3.2 erfüllt, dann ist die Lösung der Probleme (P_A) , (P_B) und (P_C) eindeutig. Insbesondere gelten die oben genannten Konvergenzen dann für die Gesamtfolge.

Beweis:

Seien $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, 1))}$ und $\|\cdot\|_H := \|\cdot\|_{L^2(0, 1; C([0, T]))}$.

Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir die von K abhängigen Diskretisierungsparameter auch mit N, M, δ, h und k ohne explizit auf die Abhängigkeit von K

hinzuweisen.

Da Voraussetzung 1 erfüllt ist, sind Satz 4.0.5 sowie Satz 5.3.5 und die daraus resultierenden Korollare 5.3.6 und 5.3.7 anwendbar.

Der Satz 4.0.5 liefert die Existenz von eindeutigen Lösungen der diskreten Probleme (D_A) , (D_B) und (D_C) .

Aufgrund der Abschätzungen in Korollar 5.3.7 und Satz 5.3.5 sowie der Gleichung (3.33) des Finite-Differenzen-Schemas gibt es positive Konstanten $C = C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)$ und $C_3 = C_3(v_0, \varepsilon_0, a, b, g, T)$, die nur von den jeweils angegebenen Daten und Konstanten abhängen, so daß für alle K gilt

$$\|\bar{v}^K\|^2 = \max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (v_m^l)^2 \leq C_3(v_0, \varepsilon_0, a, b, g, T), \quad (6.6)$$

$$\|\hat{v}_t^K\|^2 = \max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (D_h v_m^l)^2 \leq C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T), \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_x^K\|^2 &= \max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (D_k v_m^l)^2 = \max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (D_h \varepsilon_m^{l-1})^2 \\ &\leq \frac{1}{a} C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T), \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\|\bar{v}^K - \hat{v}^K\|^2 \leq \max_{1 \leq m \leq M} h^2 k \sum_{l=1}^N (D_h v_m^l)^2 \leq h^2 C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) \rightarrow 0 \quad \text{für } K \rightarrow \infty, \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \|\bar{v}^K - \tilde{v}^K\|^2 &\leq \max_{1 \leq m \leq M} k^3 \sum_{l=1}^N (D_k v_m^l)^2 = \max_{1 \leq m \leq M} k^3 \sum_{l=1}^N (D_h \varepsilon_m^{l-1})^2 \\ &\leq \frac{k^2}{a} C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) \rightarrow 0 \quad \text{für } K \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Da die Folge $(\bar{v}^K)_{K \in \mathbb{N}}$ wegen Abschätzung (6.6) in $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ beschränkt ist, existiert eine Teilfolge, die schwach* gegen eine Funktion $v \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ konvergiert. Wegen der Abschätzungen (6.9) und (6.10) konvergieren auch Teilfolgen der Folgen $(\hat{v}^K)_{K \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{v}^K)_{K \in \mathbb{N}}$, schwach* gegen v . Zur Vereinfachung der Schreibweise behalten wir die bisherige Indizierung bei.

Weiterhin gibt es aufgrund der Abschätzungen in den Korollaren 5.3.7 und 5.3.6 und Lemma 5.1.12 neben der bereits eingeführten Konstante $C = C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)$ weitere positive Konstanten $C_1 = C_1(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)$, $C_2 = C_2(v_0, \varepsilon_0, a, b, g, T)$ und $D = D(v_0, \varepsilon_0, b)$, die nur von den jeweils angegebenen Daten und Konstanten abhängen, so daß für alle K gilt

$$\|\bar{\sigma}^K\|^2 = \max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (\sigma_m^{l-1})^2 \leq C_2(v_0, \varepsilon_0, a, b, g, T), \quad (6.11)$$

$$\|\hat{\sigma}_t^K\|^2 = \max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (D_h \sigma_m^{l-1})^2 \leq \frac{b^2}{a} C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T), \quad (6.12)$$

$$\|\tilde{\sigma}_x^K\|^2 = \max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (D_k \sigma_m^l)^2 \leq C_1(v_0, \varepsilon_0, b, g, T), \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \|\check{\sigma}_x^K\|^2 &\leq \max_{1 \leq m \leq M} 9k \sum_{l=1}^{N-1} (D_k \sigma_m^l)^2 + 6k \sum_{l=1}^{N-1} (D_k \sigma_0^l)^2 \\ &\stackrel{(5.38), 5.1.12}{\leq} 9C_1(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) + 6D(v_0, \varepsilon_0, b), \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\|\check{\sigma}_t^K\|^2 \leq \max_{1 \leq m \leq M} 12k \sum_{l=0}^{N-1} (D_h \sigma_m^l)^2 \stackrel{(5.39)}{\leq} 12 \frac{b^2}{a} C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T), \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \|\bar{\sigma}^K - \hat{\sigma}^K\|^2 &\leq \max_{1 \leq m \leq M} h^2 k \sum_{l=1}^N (D_h \sigma_m^{l-1})^2 \\ &\leq h^2 \frac{b^2}{a} C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) \rightarrow 0 \quad \text{für } K \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \|\bar{\sigma}^K - \check{\sigma}^K\|^2 &\leq \max_{1 \leq m \leq M} k^3 \sum_{l=1}^N (D_k \sigma_m^l)^2 \leq k^2 C_1(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } K \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \|\hat{\sigma}^K - \check{\sigma}^K\|^2 &\leq \max_{0 \leq m \leq M} 4k^3 \sum_{l=1}^{N-1} (D_k \sigma_m^l)^2 \\ &\stackrel{(5.38), 5.1.12}{\leq} 4k^2 C_1(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) + 4k^2 D(v_0, \varepsilon_0, b) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } K \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Aus den Abschätzungen (6.11), (6.16), (6.17) und (6.18) folgt die Existenz einer Funktion $\sigma \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$, so daß jeweils für eine Teilfolge, zur Vereinfachung behalten wir wiederum die bisherige Indizierung bei, gilt

$$\bar{\sigma}^K, \hat{\sigma}^K, \check{\sigma}^K, \tilde{\sigma}^K \xrightarrow{*} \sigma \quad \text{für } K \rightarrow \infty.$$

Berücksichtigt man zusätzlich die Abschätzungen (6.14) und (6.15), so folgt, daß die Folge $(\check{\sigma}^K)_{K \in \mathbb{N}}$ beschränkt im Raum $V = W^{1,\infty}(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^\infty(0, T; W^{1,2}(0, 1))$ ist. Da dieser Raum nach [K96, Cor. V.2.5] kompakt in $C([0, 1] \times [0, T])$ einbettet, ist die Konvergenz der obigen Teilfolge der Folge $(\check{\sigma}^K)_{K \in \mathbb{N}}$ gegen σ sogar gleichmäßig. Da nach der Definition der Interpolierenden für alle $x \in [x_{l-1}, x_l]$, $l \in \{1, \dots, N(K)\}$, gilt

$$\hat{\sigma}^K(x, t) = \check{\sigma}^K(x_{l-1}, t),$$

konvergiert eine Teilfolge der Folge $(\hat{\sigma}^K)_{K \in \mathbb{N}}$, stark in $L^\infty(0, 1; C([0, T]))$ gegen σ .

Da $L^\infty(0, 1; C([0, T]))$ in $L^2(0, 1; C([0, T]))$ einbettet, konvergiert diese Teilfolge auch stark in $L^2(0, 1; C([0, T]))$.

Außerdem gibt es aufgrund von Satz 5.3.5 und der Abschätzung (5.42) in Korollar 5.3.7 neben der bereits eingeführten Konstante $C = C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)$ die positive Konstante $C_4 = C_4(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)$, die nur von den angegebenen Daten und Konstanten abhängt, so daß für alle K gilt

$$\|\bar{\varepsilon}^K\|^2 = \max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (\varepsilon_m^{l-1})^2 \leq \frac{1}{a} C_4(v_0, \varepsilon_0, b, g, T), \quad (6.19)$$

$$\|\hat{\varepsilon}_t^K\|^2 = \max_{1 \leq m \leq M} k \sum_{l=1}^N (D_h \varepsilon_m^{l-1})^2 \leq \frac{1}{a} C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T), \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \|\bar{\varepsilon}^K - \hat{\varepsilon}^K\|^2 &\leq \max_{1 \leq m \leq M} h^2 k \sum_{l=1}^N (D_h \varepsilon_m^{l-1})^2 \\ &\leq h^2 \frac{1}{a} C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) \rightarrow 0 \quad \text{für } K \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Aus (6.19) und (6.21) folgt die Existenz einer Funktion $\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$, so daß jeweils für eine Teilfolge, zur Vereinfachung der Schreibweise behalten wir die bisherige Indizierung bei, gilt

$$\bar{\varepsilon}^K, \hat{\varepsilon}^K \xrightarrow{*} \varepsilon \quad \text{für } K \rightarrow \infty. \quad (6.22)$$

Weiterhin folgt aus den Abschätzungen (6.7), (6.8), (6.12) - (6.15) und (6.20), daß jeweils auch geeignete Teilfolgen von $\hat{v}_t^K, \tilde{v}_x^K, \hat{\sigma}_t^K, \tilde{\sigma}_x^K, \check{\sigma}_t^K, \check{\sigma}_x^K$ und $\hat{\varepsilon}_t^K$ in $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ bezüglich der schwach*-Topologie konvergieren. Zur Vereinfachung der Schreibweise behalten wir wiederum die bisherige Indizierung bei. Da schwache Ableitungen mit schwachen Grenzwerten kompatibel sind (vgl. z.B. [Zei90a, Problem 21.3b]), gilt für $K \rightarrow \infty$

$$\hat{v}_t^K \xrightarrow{*} v_t, \quad \tilde{v}_x^K \xrightarrow{*} v_x, \quad (6.23)$$

$$\hat{\sigma}_t^K \xrightarrow{*} \sigma_t, \quad \tilde{\sigma}_x^K \xrightarrow{*} \sigma_x, \quad (6.24)$$

$$\check{\sigma}_t^K \xrightarrow{*} \sigma_t, \quad \check{\sigma}_x^K \xrightarrow{*} \sigma_x, \quad (6.25)$$

$$\hat{\varepsilon}_t^K \xrightarrow{*} \varepsilon_t. \quad (6.26)$$

Damit ist $v \in V$. Da V nach [K96, Cor. V.2.5] in $C([0, 1] \times [0, T])$ einbettet, ist also $v \in C([0, 1] \times [0, T])$.

Da die g^K wegen Lemma 5.1.4 für $K \rightarrow \infty$ stark gegen g in $L^2(0, T; L^2(0, 1))$ konvergieren, folgt mit den obigen Konvergenzen die Existenz einer Teilfolge, zur Vereinfachung behalten wir die bisherige Indizierung bei, so daß gilt

$$\hat{v}_t^K - \tilde{\sigma}_x^K - g^K \rightharpoonup v_t - \sigma_x - g \quad \text{in } L^2(0, T; L^2(0, 1)) \quad \text{für } K \rightarrow \infty.$$

Aus Vereinfachungsgründen verzichten wir bei den folgenden Integralausdrücken auf die explizite Angabe der Integrationsvariablen und schreiben zum Beispiel \hat{v}_t^K statt $\hat{v}_t^K(x, t)$. Wegen Gleichung (6.3) ist die duale Paarung

$$\int_0^T \int_0^1 (\hat{v}_t^K - \tilde{\sigma}_x^K - g^K) \varphi \, dx \, dt = 0,$$

für jedes $\varphi \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$. Also gilt auch für den Grenzwert

$$\int_0^T \int_0^1 (v_t - \sigma_x - g) \varphi \, dx \, dt = 0, \quad (6.27)$$

insbesondere für jedes $\varphi \in C_0^\infty((0, 1) \times (0, T))$. Das Hauptlemma der Variationsrechnung liefert

$$(v_t - \sigma_x - g)(x, t) = 0 \quad \text{für fast alle } (x, t) \in (0, 1) \times (0, T). \quad (6.28)$$

Entsprechend ergeben die schwach*-Konvergenzen (6.23), (6.26)

$$\hat{\varepsilon}_t^K - \tilde{v}_x^K \xrightarrow{*} \varepsilon_t - v_x \quad \text{in } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \quad \text{für } K \rightarrow \infty.$$

Daraus und aus der Gleichung (6.4) folgt für jedes $\varphi \in L^1(0, T; L^2(0, 1))$, also auch für jedes $\varphi \in C_0^\infty((0, 1) \times (0, T))$

$$\int_0^T \int_0^1 (\varepsilon_t - v_x) \varphi \, dx \, dt = 0. \quad (6.29)$$

Das Hauptlemma der Variationsrechnung liefert wieder

$$\varepsilon_t(x, t) = v_x(x, t) \quad \text{für fast alle } (x, t) \in (0, 1) \times (0, T). \quad (6.30)$$

Wir zeigen jetzt, daß die Grenzfunktionen v , σ die Anfangsbedingungen und die Randbedingungen erfüllen.

Nach den Abschätzungen (6.19) - (6.21) und dem Lemma 6.1.1 konvergiert eine geeignete Teilfolge von $(\hat{\varepsilon}^K(\cdot, 0))_{K \in \mathbb{N}}$ schwach gegen $\varepsilon(\cdot, 0)$ in $L^2(0, 1)$. Da außerdem $(\hat{\varepsilon}^K(\cdot, 0))_{K \in \mathbb{N}}$ in $L^\infty(0, 1)$ stark gegen die stetige Funktion ε_0 konvergiert, existiert ein stetiger Repräsentant von $\varepsilon(\cdot, 0)$, der gleich ε_0 ist. In diesem Sinne erfüllt ε die Anfangsbedingung (3.5). Entsprechend folgt, daß v die Anfangsbedingung (3.4) erfüllt.

Wegen der Abschätzungen (6.6), (6.8), (6.10) sowie (6.11), (6.13), (6.17) sind die Folgen $(\tilde{v}^K(\cdot, t))_{K \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{\sigma}^K(\cdot, t))_{K \in \mathbb{N}}$ in $W^{1,2}(0, 1)$ für fast alle $t \in (0, T)$ beschränkt. Da $W^{1,2}(0, 1)$ kompakt in $C([0, 1])$ einbettet, konvergiert für fast jedes $t \in (0, T)$ jeweils eine Teilfolge von $(\tilde{v}^K(\cdot, t))_{K \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{\sigma}^K(\cdot, t))_{K \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $v(\cdot, t)$ bzw. $\sigma(\cdot, t)$.

Nach der Definition der Interpolierenden gilt für $t \in [t_{m-1}, t_m)$, $0 \leq m \leq M$,

$$\begin{aligned} \tilde{v}^K(0, t) &= v_m^0, & \tilde{v}^K(1, t) &= v_m^N, \\ \tilde{\sigma}^K(0, t) &= \sigma_m^0, & \tilde{\sigma}^K(1, t) &= \sigma_m^N. \end{aligned}$$

Aus den Randbedingungen (3.37), (3.38) bzw. (3.39) und der Stetigkeit der Funktionen v , σ ergibt sich dann, daß v und σ die Randbedingungen (3.7), (3.8) bzw. (3.9) erfüllen.

Sämtliche bisher aufgetauchten Teilfolgen, die in der jeweils genannten Topologie konvergieren, können so gewählt werden, daß sie alle durch ein und dieselbe streng monoton wachsende Indexfolge $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $K_j \in \mathbb{N}$, festgelegt sind, indem die Suche nach Teilfolgen jeweils auf diejenige Indexfolge eingeschränkt wird, für die die vorhergehende Konvergenz gezeigt wurde. Die Indexfolge bezüglich der die letzte Teilfolge konvergiert, hat die gewünschten Eigenschaften. Alle weiteren Überlegungen beziehen sich auf diese Indexfolge. Zur Vereinfachung wird weiter die bisherige Indizierung beibehalten, ohne daß explizit darauf verwiesen wird, daß nur die durch diese Indexfolge bestimmte Teilfolge gemeint ist.

Es bleibt zu zeigen, daß für die Funktionen ε und σ der folgende Zusammenhang gilt:

$$\mathfrak{H}[\varepsilon] = \sigma,$$

wobei \mathfrak{H} der ortsabhängige Hysterese-Operator aus Definition 6.1.2 ist. Dazu definieren wir für $x \in [0, 1]$ und $t \in [0, T]$ für jedes $K \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$\begin{aligned} s^K(x, t) &:= \mathcal{H}[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot)](t), \\ s_0^K(x, t) &:= \mathcal{H}^{\delta(K)}[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot)](t), \\ s_1^K(x, t) &:= \mathcal{H}^{\delta(K)}[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot) \circ \tau_h](t + h), \end{aligned} \quad (6.31)$$

wobei in der Definition der Funktionen s^K und s_0^K mit $\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot)$ die Einschränkung dieser Funktion auf das Intervall $[0, T]$ gemeint ist.

Da die Funktion $\hat{\varepsilon}^K \in W^{1,\infty}(-h, T; L^2(0, 1))$ ist, und $W^{1,\infty}(-h, T; L^2(0, 1))$ entsprechend Lemma A.0.17 in $L^2(0, 1; C([-h, T]))$ einbettet, läßt sich $\hat{\varepsilon}^K$ also mit einem Element aus $L^2(0, 1; C([-h, T]))$ identifizieren. Für jedes $x \in [0, 1]$ ist $\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot) \circ \tau_h \in C([0, T + h])$ und damit nach Voraussetzung 1 im Definitionsbereich des Hysterese-Operators $\mathcal{H}^{\delta(K)}$. Aus der Bemerkung 6.1.3 ergibt sich, daß s^K , s_0^K und $s_1^K \in L^2(0, 1; C([0, T]))$ sind. Wir zeigen zunächst, daß die Folge $(s^K)_{K \in \mathbb{N}}$ in $L^2(0, 1; C([0, T]))$ stark gegen σ konvergiert. Dazu untersuchen wir die folgenden Summanden:

$$\begin{aligned} &\|s^K - \sigma\|_H \\ &\leq \|s^K - s_0^K\|_H + \|s_0^K - s_1^K\|_H + \|s_1^K - \hat{\sigma}^K\|_H + \|\hat{\sigma}^K - \sigma\|_H \\ &=: A + B + C + D. \end{aligned}$$

Wegen der Fehlerabschätzung (3.27) aus der Voraussetzung 1 gilt

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_0^1 \sup_{t \in [0, T]} |\mathcal{H}[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot)](t) - \mathcal{H}^{\delta(K)}[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot)](t)|^2 dx \\ &\leq p^2 (\delta(K))^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } K \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Sei die Funktion $\hat{\varepsilon}_F^K : [0, 1] \times [-h, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\hat{\varepsilon}_F^K(x, t) := \begin{cases} \hat{\varepsilon}^K(x, t), & \text{falls } (x, t) \in [0, 1] \times [0, T], \\ \hat{\varepsilon}^K(x, 0), & \text{falls } (x, t) \in [0, 1] \times [-h, 0]. \end{cases}$$

Wegen der Ratenunabhängigkeit der Hysterese-Operatoren gilt für alle $t \in [0, T]$ und $x \in [0, 1]$

$$s_0^K(x, t) = \mathcal{H}^{\delta(K)}[\hat{\varepsilon}_F^K(x, \cdot) \circ \tau_h](t + h). \quad (6.33)$$

Aus (6.33) und aus der Lipschitz-Stetigkeit des Hysterese-Operators nach Voraussetzung 1, der Gleichung (3.33) und der Anfangsbedingung (3.35) des Finite-Differenzen-Schemas

sowie aus Lemma 5.1.7 ergibt sich

$$\begin{aligned}
B^2 &= \int_0^1 \sup_{t \in [0, T]} \left| \mathcal{H}^{\delta(K)}[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot) \circ \tau_h](t+h) - s_0^K(x, t) \right|^2 dx \\
&= k \sum_{l=1}^N \sup_{t \in [0, T]} \left| \mathcal{H}^{\delta(K)}[\hat{\varepsilon}^K(x_{l-1}, \cdot) \circ \tau_h](t+h) - \mathcal{H}^{\delta(K)}[\hat{\varepsilon}_F^K(x_{l-1}, \cdot) \circ \tau_h](t+h) \right|^2 \\
&\leq b^2 k \sum_{l=1}^N \sup_{t \in [0, T]} \sup_{\tau \in [0, t+h]} \left| \hat{\varepsilon}^K(x_{l-1}, \tau-h) - \hat{\varepsilon}_F^K(x_{l-1}, \tau-h) \right|^2 \\
&= b^2 k \sum_{l=1}^N \sup_{\tau \in [0, h]} \left| \hat{\varepsilon}^K(x_{l-1}, \tau-h) - \hat{\varepsilon}_F^K(x_{l-1}, \tau-h) \right|^2 \\
&= b^2 k \sum_{l=1}^N \left| \hat{\varepsilon}^K(x_{l-1}, -h) - \hat{\varepsilon}_F^K(x_{l-1}, -h) \right|^2 = b^2 k \sum_{l=1}^N \left| \varepsilon_{-1}^{l-1} - \varepsilon_0^{l-1} \right|^2 \\
&= b^2 k \sum_{l=1}^N (D_k v_0^l)^2 h^2 \leq b^2 \|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 h^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } K \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Für $x \in [x_{l-1}, x_l]$, $1 \leq l \leq N(K)$, gilt nach der Definition der Funktionen s_1^K , $\hat{\sigma}^K$ und der Monotonie des Operators $\mathcal{H}^{\delta(K)}$ nach Voraussetzung 1

$$\begin{aligned}
s_1^K(x, t) &= s_1^K(x_{l-1}, t), \\
\hat{\sigma}^K(x, t) &= \hat{\sigma}^K(x_{l-1}, t),
\end{aligned}$$

wobei $s_1^K|_{[t_{m-1}, t_m]}(x_{l-1}, \cdot)$ und $\hat{\sigma}^K|_{[t_{m-1}, t_m]}(x_{l-1}, \cdot)$, $0 \leq m \leq M(K)$, monotone Funktionen sind, deren Bilder jeweils im Intervall $[\sigma_{m-1}^{l-1}, \sigma_m^{l-1}]$ liegen. Deshalb gilt

$$\sup_{t \in [t_{m-1}, t_m]} |s_1^K - \hat{\sigma}^K|(x_{l-1}, t) \leq |\sigma_m^{l-1} - \sigma_{m-1}^{l-1}|.$$

Zusammen mit dem Korollar 5.3.6 folgt die Existenz einer von K unabhängigen, positiven Konstanten \tilde{C} , so daß gilt

$$\begin{aligned}
C^2 &= \|s_1^K - \hat{\sigma}^K\|_H = \sum_{l=1}^N \int_{x_{l-1}}^{x_l} \sup_{t \in [0, T]} (s_1^K - \hat{\sigma}^K)^2(x, t) dx \\
&\leq \sum_{l=1}^N k \max_{1 \leq m \leq M} (\sigma_m^{l-1} - \sigma_{m-1}^{l-1})^2 = h^2 \max_{1 \leq m \leq M} \left(k \sum_{l=1}^N (D_h \sigma_m^{l-1})^2 \right) \\
&\leq \tilde{C} h^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } K \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Wir haben bereits oben gezeigt, daß die Folge $(\hat{\sigma}^K)_{K \in \mathbb{N}}$ in $L^2(0, 1; C([0, T]))$ stark gegen σ konvergiert. Also gilt

$$D \rightarrow 0 \quad \text{für } K \rightarrow \infty. \tag{6.36}$$

Aus den Abschätzungen (6.32), (6.34), (6.35) und (6.36) folgt die starke Konvergenz der Folge $(s^K)_{K \in \mathbb{N}}$ gegen σ in $L^2(0, 1; C([0, T]))$.

Wegen der Lipschitz-Stetigkeit des Hysterese-Operators nach Voraussetzung 1 gilt

$$\begin{aligned}
& \|s^K - \mathfrak{H}[\varepsilon]\|_H^2 = \|\mathfrak{H}[\hat{\varepsilon}^K] - \mathfrak{H}[\varepsilon]\|_H^2 \\
& = \int_0^1 \sup_{t \in [0, T]} |\mathcal{H}[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot)](t) - \mathcal{H}[\varepsilon(x, \cdot)](t)|^2 dx \\
& \leq b^2 \int_0^1 \sup_{t \in [0, T]} |\hat{\varepsilon}^K(x, t) - \varepsilon(x, t)|^2 dx = b^2 \|\hat{\varepsilon}^K - \varepsilon\|_H^2.
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Würde die Folge $(\hat{\varepsilon}^K)_{K \in \mathbb{N}}$ sogar stark in $L^2(0, 1; C([0, T]))$ gegen ε konvergieren, so würde aus der starken Konvergenz der Folge $(s^K)_{K \in \mathbb{N}}$ gegen σ und der Abschätzung (6.37) folgen, daß $\mathfrak{H}[\varepsilon] = \sigma$ ist.

Die obigen A-priori-Abschätzungen liefern aber nicht genügend Kompaktheit, um daraus die starke Konvergenz der Folge $(\hat{\varepsilon}^K)_{K \in \mathbb{N}}$ folgern zu können.

Falls der inverse Operator \mathcal{H}^{-1} existiert und Lipschitz-stetig ist, wie in der Voraussetzung 2* gefordert, ergibt sich, daß $(\hat{\varepsilon}^K)_{K \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(0, 1; C([0, T]))$ ist. Für $J, q \in \mathbb{N}$ gilt dann nämlich

$$\begin{aligned}
\|\hat{\varepsilon}^{J+q} - \hat{\varepsilon}^J\|_H^2 &= \int_0^1 \sup_{t \in [0, T]} (\mathcal{H}^{-1}[s^{J+q}(x, \cdot)](t) - \mathcal{H}^{-1}[s^J(x, \cdot)](t))^2 dx \\
&\leq S^2 \int_0^1 \sup_{t \in [0, T]} (s^{J+q}(x, t) - s^J(x, t))^2 dx = S^2 \|s^{J+q} - s^J\|_H^2,
\end{aligned}$$

wobei $(s^K)_{K \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(0, 1; C([0, T]))$ ist. Da $L^2(0, 1; C([0, T]))$ vollständig ist, konvergiert $(\hat{\varepsilon}^K)_{K \in \mathbb{N}}$ dann stark in $L^2(0, 1; C([0, T]))$. Der Grenzwert muß gleich der unter (6.22) eingeführten Funktion ε sein. Mit den vorhergehenden Überlegungen folgt

$$\mathfrak{H}[\varepsilon] = \sigma.$$

Da $\sigma \in C([0, 1] \times [0, T])$ ist, ergibt sich aus der Lipschitz-Stetigkeit des inversen Operators \mathcal{H}^{-1} , daß auch ε einen stetigen Repräsentanten, $\varepsilon \in C([0, 1] \times [0, T])$, besitzt.

Ist Voraussetzung 2* nicht erfüllt, dann läßt sich die fehlende Kompaktheit unter Ausnutzung der Monotonie gemäß Voraussetzung 2 mit Hilfe des Minty-Tricks kompensieren (vgl. [E90, 5.A.3] und [K96, Beweis von Th. III.1.2]):

Da die Folge $(s^K)_{K \in \mathbb{N}}$ stark gegen σ in $L^2(0, 1; C([0, T]))$ und damit nach dem Einbettungslemma A.0.18 auch in $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ konvergiert, liefern (6.32) und das Einbettungslemma A.0.18 auch die starke Konvergenz von $(s_0^K)_{K \in \mathbb{N}}$ gegen σ in $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$, also auch in $L^1(0, T; L^2(0, 1))$. Außerdem gilt

$$\hat{\varepsilon}_t^K \xrightarrow{*} \varepsilon_t \quad \text{in } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) = (L^1(0, T; L^2(0, 1)))^* \quad \text{für } K \rightarrow \infty.$$

Aus diesen beiden Konvergenzen folgt

$$\int_0^T \int_0^1 \mathcal{H}^{\delta(K)}[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot)](t) \hat{\varepsilon}_t^K(x, t) dx dt \rightarrow \int_0^T \int_0^1 \sigma(x, t) \varepsilon_t(x, t) dx dt \quad \text{für } K \rightarrow \infty.$$

$$(6.38)$$

Es gilt

$$\int_0^T \int_0^1 (v_t - \sigma_x - g) \varphi \, dx \, dt = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in L^2(0, T; L^2(0, 1)). \quad (6.39)$$

Sei $v^\mu(x, t) := \varepsilon(x, t) - \mu w(x) \int_0^t \gamma(\tau) d\tau$ mit $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\gamma \in L^2(0, T)$, $w \in L^2(0, 1)$.

Nach Voraussetzung 2, Definition 6.1.4 und Bemerkung 6.1.5 existiert ein Operator $\mathfrak{V}^{\delta(K)} : L^2(0, 1; [W^{1,2}(0, T)]^2) \rightarrow L^2(0, 1; W^{1,1}(0, T))$, $\mathfrak{V}^\delta[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x) = \mathcal{V}^\delta[\varepsilon_1(x, \cdot), \varepsilon_2(x, \cdot)]$, so daß gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 (\mathcal{H}^{\delta(K)}[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot)] - \mathcal{H}^{\delta(K)}[v^\mu(x, \cdot)])(t)(\hat{\varepsilon}_t^K - v_t^\mu)(x, t) \, dx \, dt \\ & \geq \int_0^1 (\mathcal{V}^{\delta(K)}[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot), v^\mu(x, \cdot)](T) - \mathcal{V}^{\delta(K)}[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot), v^\mu(x, \cdot)](0)) \, dx \\ & \geq - \int_0^1 \mathcal{V}^{\delta(K)}[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot), v^\mu(x, \cdot)](0) \, dx \\ & = \int_0^1 (\mathcal{V}^{\delta(K)}[v^\mu(x, \cdot), v^\mu(x, \cdot)](0) - \mathcal{V}^{\delta(K)}[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot), v^\mu(x, \cdot)](0)) \, dx \\ & \geq - \int_0^1 |\mathcal{V}^{\delta(K)}[v^\mu(x, \cdot), v^\mu(x, \cdot)](0) - \mathcal{V}^{\delta(K)}[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot), v^\mu(x, \cdot)](0)| \, dx \\ & \geq -e \max_{x \in [0, 1]} |\varepsilon_0(x)| \max_{x \in [0, 1]} |\varepsilon_0(x) - \hat{\varepsilon}^K(x, 0)| \rightarrow 0 \quad \text{für } K \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Aus (6.38) und der schwach*-Konvergenz von $\hat{\varepsilon}_t^K$ gegen ε_t und der starken Konvergenz von s_0^K gegen σ in $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ sowie von $\mathfrak{H}^{\delta(K)}[v^\mu]$ gegen $\mathfrak{H}[v^\mu]$ in $L^2(0, 1; C([0, T]))$ nach (3.27) in Voraussetzung 1 und damit nach dem Einbettungslemma A.0.18 auch in $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ folgt

$$\begin{aligned} 0 & \leq \lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^1 (\mathcal{H}^{\delta(K)}[\hat{\varepsilon}^K(x, \cdot)] - \mathcal{H}^{\delta(K)}[v^\mu(x, \cdot)])(t)(\hat{\varepsilon}_t^K - v_t^\mu)(x, t) \, dx \, dt \\ & = \int_0^T \int_0^1 (\sigma(x, t) - \mathcal{H}[v^\mu(x, \cdot)](t))(\varepsilon_t - v_t^\mu)(x, t) \, dx \, dt \\ & = \mu \int_0^T \int_0^1 (\sigma(x, t) - \mathcal{H}[v^\mu(x, \cdot)](t))w(x)\gamma(t) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Für alle $\mu > 0$ gilt also

$$0 \leq \int_0^T \int_0^1 (\sigma(x, t) - \mathcal{H}[v^\mu(x, \cdot)](t))w(x)\gamma(t) \, dx \, dt. \quad (6.41)$$

Für alle $\mu < 0$ gilt

$$0 \geq \int_0^T \int_0^1 (\sigma(x, t) - \mathcal{H}[v^\mu(x, \cdot)](t))w(x)\gamma(t) \, dx \, dt. \quad (6.42)$$

Aus der Lipschitz-Stetigkeit nach Voraussetzung 1 und dem Einbettungslemma A.0.18 folgt

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{H}[v^\mu] - \mathfrak{H}[\varepsilon]\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} &\leq \|\mathfrak{H}[v^\mu] - \mathfrak{H}[\varepsilon]\|_{L^2(0,1;C([0,T]))} \\ &\leq b|\mu| \sup_{t \in [0,T]} \left| \int_0^t \gamma(\tau) d\tau \right| \|w\|_{L^2(0,1)} \rightarrow 0 \quad \text{für } \mu \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Aus der starken Konvergenz von $\mathfrak{H}[v^\mu]$ gegen $\mathfrak{H}[\varepsilon]$ in $L^\infty(0,T;L^2(0,1))$ für $\mu \rightarrow 0$, (6.41) und (6.42) folgt

$$0 = \int_0^T \int_0^1 (\sigma(x,t) - \mathcal{H}[\varepsilon(x,\cdot)](t)) w(x) \gamma(t) dx dt.$$

Das Hauptlemma der Variationsrechnung liefert

$$\sigma(x,t) = \mathcal{H}[\varepsilon(x,\cdot)](t) \quad \text{für fast alle } (x,t) \in (0,1) \times (0,T).$$

Damit ist der erste Teil des Beweises abgeschlossen. Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen.

Eindeutigkeit:

Sei Voraussetzung 2 erfüllt. Seien $(v_i, \sigma_i, \varepsilon_i) \in V \times V \times W$, $i = 1, 2$, Lösungen desselben Problems (P_A) , (P_B) bzw. (P_C) . Insbesondere läßt sich ε_i , $i = 1, 2$, dann nach Lemma A.0.17 mit einer Funktion aus $L^2(0,1;W^{1,2}(0,T))$ identifizieren. Sei \mathfrak{V} der ortsabhängige Operator aus der Definition 6.1.4. Da $(v_i, \varepsilon_i, \sigma_i)$, $i = 1, 2$, Lösungen sind, gilt nach (6.27) mit $\varphi := (v_1 - v_2)\chi_{[0,1] \times [0,t]} \in L^2(0,T;L^2(0,1))$ für jedes $t \in (0,T]$

$$0 = \int_0^T \int_0^1 (v_{1,t} - v_{2,t} - \sigma_{1,x} + \sigma_{2,x})(v_1 - v_2) \chi_{[0,1] \times [0,t]} dx dt.$$

Daraus folgt mit dem Satz von Fubini, partieller Integration, den Randbedingungen (3.7) bzw. (3.8) bzw. (3.9), der Gleichung (3.2), den Anfangsbedingungen (3.4), (3.5) sowie der Voraussetzung 2 (i) und der Bemerkung 6.1.5, welche

$$\mathfrak{V}(L^2(0,1;[W^{1,2}(0,T)]^2)) \subset L^2(0,1;W^{1,1}(0,T))$$

liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \int_0^1 (v_{1,\tau} - v_{2,\tau})(v_1 - v_2) dx d\tau - \int_0^t \int_0^1 (\sigma_{1,x} - \sigma_{2,x})(v_1 - v_2) dx d\tau \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 (v_1 - v_2)^2(x,t) dx - \int_0^1 (v_1 - v_2)^2(x,0) dx \right) \\ &\quad - \int_0^t [(\sigma_1 - \sigma_2)(v_1 - v_2)(x,\tau)]_{x=0}^{x=1} d\tau + \int_0^t \int_0^1 (\sigma_1 - \sigma_2)(v_{1,x} - v_{2,x}) dx d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (v_1 - v_2)^2(x,t) dx + \int_0^t \int_0^1 (\sigma_1 - \sigma_2)(\varepsilon_{1,t} - \varepsilon_{2,t}) dx d\tau \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 (v_1 - v_2)^2(x,t) dx + \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{V}[\varepsilon_1(x,\cdot), \varepsilon_2(x,\cdot)](\tau) d\tau dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (v_1 - v_2)^2(x,t) dx + \int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x,t) dx - \int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x,0) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 (v_1 - v_2)^2(x,t) dx. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Aus der Ungleichung (6.43), den Gleichungen (3.2) - (3.3) und der Anfangsbedingung (3.5) folgt

$$v_1 = v_2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad \sigma_1 = \sigma_2.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung $(v, \sigma, \varepsilon) \in V \times V \times W$ muß die im Satz genannte Konvergenz jeweils für die Gesamtfolge, und nicht nur für eine Teilfolge, gelten.

Andernfalls gäbe es zu der Grenzfunktion (v, σ, ε) eine Umgebung im Sinne der zu dieser Konvergenz gehörigen Topologie, so daß unendlich viele Folgenglieder nicht in dieser Umgebung liegen.

Auf die aus diesen Gliedern gebildete Folge können wieder die im ersten Teil des Beweises geführten Kompaktheitsschlüsse angewandt werden. Diese sichern die Existenz einer konvergenten Teilfolge, wobei die Grenzfunktion wieder eine Lösung im Sinne unseres Lösungsbegriffs sein muß, die verschieden von (v, σ, ε) ist. Dies steht im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Lösung. \square

Bemerkung 6.2.4 Sei (v, σ, ε) die nach Satz 6.2.3 eindeutige Lösung des Problems (P_A) , (P_B) bzw. (P_C) , wobei das konstitutive Gesetz (3.3) durch den im Beispiel 3.3.5 definierten abgeschnittenen Prandtl-Ishlinskii-Operator gegeben sei

$$\mathcal{H}[\varepsilon](t) = \int_0^R \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) d\nu(r) + \varepsilon(t) \int_R^\infty d\nu(r),$$

mit $-\nu(R) = a$ für positive Konstanten R und a . Aus [BS96, Prop. 2.11.1] folgt, daß es einen Hysterese-Operator $\mathcal{G} = \mathcal{H}^{-1} : \mathcal{H}[C([0, T])] \rightarrow C([0, T])$ gibt mit

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H} = Id.$$

Der Operator \mathcal{G} ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\frac{1}{a}$. Nach der Abschätzung (5.43) im Beweis von Korollar 5.3.7 gilt, wobei wir o. B. d. A. annehmen, daß $a \leq 1$ ist,

$$\max_{1 \leq m \leq M, 0 \leq l \leq N-1} |\sigma_m^l| \leq D_1(v_0, \varepsilon_0, b, T) + T \left(\frac{b^2}{a} C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) \right)^{\frac{1}{2}} + C_1(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)^{\frac{1}{2}}.$$

Nach der Abschätzung (5.11) aus dem Beweis zum Lemma 5.1.11, dem Lemma 5.1.7 und der Bedingung an das Schrittweitenverhältnis (3.30) gilt für jedes $l \in \{0, \dots, N-1\}$

$$|\sigma_0^l| \leq 2b \|\varepsilon_0\|_{C([0,1])} + b^{\frac{3}{4}} T^{\frac{1}{2}} \|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)} =: D_0(v_0, \varepsilon_0, b, T).$$

Also gilt für die in (6.2) definierte Interpolierende $\check{\sigma}^K$ für alle K

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T} |\check{\sigma}^K(x, t)| \\ & \leq a^{-\frac{1}{2}} \left(D_1(v_0, \varepsilon_0, b, T) + T b C(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)^{\frac{1}{2}} + C_1(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)^{\frac{1}{2}} + D_0(v_0, \varepsilon_0, b, T) \right) \\ & =: a^{-\frac{1}{2}} D_2(v_0, \varepsilon_0, b, g, T). \end{aligned}$$

Nach den Überlegungen im Beweis von Satz 6.2.3 konvergiert zumindest eine Teilfolge der $\check{\sigma}^K$, $K \in \mathbb{N}$, gleichmäßig gegen σ . Also ist auch

$$\max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T} |\sigma(x, t)| \leq a^{-\frac{1}{2}} D_2(v_0, \varepsilon_0, b, g, T).$$

Wegen der Lipschitz-Stetigkeit des Operators \mathcal{G} gilt

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T} |\varepsilon(x, t)| &= \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T} |\mathcal{G}[\sigma(x, \cdot)](t)| \\ &\leq \frac{1}{a} \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T} |\sigma(x, t)| \leq a^{-\frac{3}{2}} D_2(v_0, \varepsilon_0, b, g, T). \end{aligned}$$

Für hinreichend kleine Daten v_0, ε_0, g ist

$$D_2(v_0, \varepsilon_0, b, g, T) \leq Ra^{\frac{3}{2}}.$$

Dann ist

$$\max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T} |\varepsilon(x, t)| \leq R$$

und für alle $r \geq R$ gilt

$$\mathfrak{s}_r[\varepsilon(x, \cdot)](t) = \varepsilon(x, t).$$

Das Bild von ε bezüglich des abgeschnittenen Prandtl-Ishlinskii-Operators \mathcal{H} stimmt also mit dem Bild von ε bezüglich des durch die Verteilungsfunktion ν gegebenen Prandtl-Ishlinskii-Operators überein:

$$\mathcal{H}[\varepsilon(x, \cdot)](t) = \int_0^\infty \mathfrak{s}_r[\varepsilon(x, \cdot)](t) d\nu(r) =: \mathcal{P}[\varepsilon(x, \cdot)](t).$$

Für hinreichend kleine Daten ist das Tripel (v, σ, ε) also auch Lösung des Problems (P_A) , (P_B) bzw. (P_C) für das konstitutive Gesetz

$$\sigma(x, \cdot) = \mathcal{P}[\varepsilon(x, \cdot)].$$

Es lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

(i) Erfüllt die Verteilungsfunktion ν die Bedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} -\nu(r)r^{\frac{2}{3}} = +\infty,$$

dann existieren für beliebige, nicht gleichzeitig verschwindende Daten v_0, ε_0, g positive Konstanten a und R , $R := a^{-\frac{3}{2}} D_2(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)$, so daß gilt

$$-\nu(R)\frac{1}{a} = -\nu(R) \left(\frac{R}{D_2(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)} \right)^{\frac{2}{3}} \geq 1.$$

Es ist also $-\nu(R) \geq a$. Der an der Stelle $R = R(D_2(v_0, \varepsilon_0, b, g, T))$ abgeschnittene Prandtl-Ishlinskii-Operator

$$\mathcal{H}[\varepsilon](t) = \int_0^R \mathfrak{s}_r[\varepsilon](t) d\nu(r) + \varepsilon(t) \int_R^\infty d\nu(r)$$

ist also von der Form wie in Beispiel 3.3.5. Nach den obigen Überlegungen ist die Lösung (v, σ, ε) des zugehörigen Problems (P_A) , (P_B) bzw. (P_C) auch Lösung des entsprechenden Problems mit dem konstitutiven Gesetz

$$\sigma(x, t) = \mathcal{P}[\varepsilon(x, \cdot)](t) = \int_0^\infty \mathfrak{s}_r[\varepsilon(x, \cdot)](t) d\nu(r).$$

(ii) Ist

$$A := \limsup_{r \rightarrow \infty} -\nu(r)r^{\frac{2}{3}} < +\infty,$$

dann gilt diese Überlegung nur für hinreichend kleine Daten, für die

$$D_2(v_0, \varepsilon_0, b, g, T)^{\frac{2}{3}} < A$$

erfüllt ist.

6.3 Fehlerabschätzung und stetige Abhängigkeit von den Daten

In diesem Abschnitt wird eine Fehlerabschätzung der Ordnung $1/2$ für jedes der Probleme (P_A) , (P_B) und (P_C) bewiesen und eine Aussage zur stetigen Abhängigkeit der Lösung von den Daten getroffen.

Sei wieder $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}$ und $\|\cdot\|_H := \|\cdot\|_{L^2(0,1;C([0,T]))}$. Sei \mathfrak{V} der ortsabhängige Operator aus der Definition 6.1.4. Die Diskretisierungsparameter N , M und δ , und damit auch die Schrittweiten h und k , seien wieder als Funktionen von K , $K \in \mathbb{N}$, gegeben. Zur Vereinfachung der Schreibweise verzichten wir wieder auf die explizite Angabe der K -Abhängigkeit.

Satz 6.3.1 *Es seien die Voraussetzungen 1, 2 sowie 3 aus Abschnitt 3.2 erfüllt und (v, σ, ε) sei eine Lösung von Problem (P_A) , (P_B) oder (P_C) für eine Funktion $g \in L^\infty(0, T; W^{1,2}(0, 1)) \cap W^{1,2}(0, T; L^2(0, 1))$. Dann gilt für den Approximationsfehler*

$$\max_{t \in [0, T]} \left(L \|v - \hat{v}^K\|_{L^2(0,1)}^2(t) + \|\sigma - \hat{\sigma}^K\|_{L^2(0,1)}^2(t) \right) \leq C(h + k + \delta) \quad (6.44)$$

mit einer von K unabhängigen Konstante C .

Für $i = 1, 2$ sei $(v_i, \sigma_i, \varepsilon_i)$ eine Lösung des gleichen Problems (P_A) , (P_B) bzw. (P_C) zu den Daten $(g_i, v_{0,i}, \varepsilon_{0,i})$. Sei $|\varepsilon_0|_\infty := \max_{i \in \{1,2\}} \{\max_{x \in [0,1]} |\varepsilon_{0,i}(x)|\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} \left(\frac{L}{2} \|v_1 - v_2\|_{L^2(0,1)}^2(t) + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^2(0,1)}^2(t) \right) \\ & \leq L \|v_{0,1} - v_{0,2}\|_{L^2(0,1)}^2 + b^2 \|\varepsilon_{0,1} - \varepsilon_{0,2}\|_{L^2(0,1)}^2 + 2Le|\varepsilon_0|_\infty \|\varepsilon_{0,1} - \varepsilon_{0,2}\|_{L^1(0,1)} \\ & \quad + 2LT \|g_1 - g_2\|_{L^2((0,1) \times (0,T))}^2. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Beweis:

Zur besseren Lesbarkeit verzichten wir in diesem Beweis bei einem Teil der Integralausdrücke auf die explizite Angabe der Integrationsvariablen.

Der ortsabhängige Operator \mathfrak{V} bildet den Raum $L^2(0, 1; [W^{1,2}(0, T)]^2)$ nach der Bemerkung 6.1.5 stetig in $L^2(0, 1; W^{1,1}(0, T))$ ab. Nach dem Einbettungslemma A.0.17 können

die Funktionen $\varepsilon, \hat{\varepsilon}^K \in W$ jeweils mit einem Element aus $L^2(0, 1; W^{1,2}(0, T))$ identifiziert werden. Also liegt $(\varepsilon, \hat{\varepsilon}^K)$ im Definitionsbereich von \mathfrak{V} .

Da die Funktionen $\sigma, v, \hat{v}^K \in W^{1,2}(0, T; L^2(0, 1))$ sind und die Funktion $\mathfrak{V}[\varepsilon, \hat{\varepsilon}^K] \in L^2(0, 1; W^{1,1}(0, T))$ ist, folgt mit partieller Integration, der Voraussetzung 3, den Einbettungslemmata A.0.17 und A.0.18, dem Hauptsatz, dem Satz von Fubini und der Voraussetzung 2 (i) sowie den Ausgangsgleichungen (3.1) - (3.3) und ihren Diskretisierungen (3.32) - (3.34) für fast jedes $t \in (0, T)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(L \|v - \hat{v}^K\|_{L^2(0,1)}^2(t) + \|\sigma - \mathfrak{H}[\hat{\varepsilon}^K]\|_{L^2(0,1)}^2(t) \right. \\
& \quad \left. - L \|v - \hat{v}^K\|_{L^2(0,1)}^2(0) - \|\sigma - \mathfrak{H}[\hat{\varepsilon}^K]\|_{L^2(0,1)}^2(0) \right) \\
&= L \int_0^t \int_0^1 (v_t - \hat{v}_t^K)(v - \hat{v}^K)(x, \tau) dx d\tau \\
& \quad + \frac{1}{2} \left(\|\mathfrak{H}[\varepsilon] - \mathfrak{H}[\hat{\varepsilon}^K]\|_{L^2(0,1)}^2(t) - \|\mathfrak{H}[\varepsilon] - \mathfrak{H}[\hat{\varepsilon}^K]\|_{L^2(0,1)}^2(0) \right) \\
&\leq L \int_0^t \int_0^1 (v_t - \hat{v}_t^K)(v - \hat{v}^K)(x, \tau) dx d\tau \\
& \quad + L \left(\int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon, \hat{\varepsilon}^K](x, t) dx - \int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon, \hat{\varepsilon}^K](x, 0) dx \right) + L \int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon, \hat{\varepsilon}^K](x, 0) dx + 0 \\
&= L \int_0^t \int_0^1 (v_t - \hat{v}_t^K)(v - \hat{v}^K)(x, \tau) dx d\tau \\
& \quad + L \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \mathfrak{V}[\varepsilon, \hat{\varepsilon}^K](x, \tau) \right) d\tau dx + L \int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon, \hat{\varepsilon}^K](x, 0) dx \\
&\leq L \int_0^t \int_0^1 (v_t - \hat{v}_t^K)(v - \hat{v}^K)(x, \tau) dx d\tau \\
& \quad + L \int_0^t \int_0^1 (\varepsilon_t - \hat{\varepsilon}_t^K)(x, \tau) (\mathfrak{H}[\varepsilon] - \mathfrak{H}[\hat{\varepsilon}^K])(x, \tau) dx d\tau + L \int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon, \hat{\varepsilon}^K](x, 0) dx \\
&= L \int_0^t \int_0^1 ((\sigma_x - \tilde{\sigma}_x^K)(v - \tilde{v}^K) + (v_x - \tilde{v}_x^K)(\sigma - \tilde{\sigma}^K)) dx d\tau \\
& \quad + L \int_0^t \int_0^1 ((\sigma_x - \tilde{\sigma}_x^K)(\tilde{v}^K - \hat{v}^K) + (v_x - \tilde{v}_x^K)(\tilde{\sigma}^K - \hat{\sigma}^K)) dx d\tau \\
& \quad + L \int_0^t \int_0^1 (\hat{\sigma}^K - \mathfrak{H}[\hat{\varepsilon}^K])(v_x - \tilde{v}_x^K) dx d\tau + L \int_0^t \int_0^1 (g - g^K)(v - \hat{v}^K) dx d\tau \\
& \quad + L \int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon, \hat{\varepsilon}^K](x, 0) dx \\
&= L \int_0^t \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} ((\sigma - \tilde{\sigma}^K)(v - \tilde{v}^K)) dx d\tau \\
& \quad + L \int_0^t \int_0^1 ((\sigma_x - \tilde{\sigma}_x^K)(\tilde{v}^K - \hat{v}^K) + (v_x - \tilde{v}_x^K)(\tilde{\sigma}^K - \hat{\sigma}^K)) dx d\tau \\
& \quad + L \int_0^t \int_0^1 (\hat{\sigma}^K - \mathfrak{H}[\hat{\varepsilon}^K])(v_x - \tilde{v}_x^K) dx d\tau + L \int_0^t \int_0^1 (g - g^K)(v - \hat{v}^K) dx d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + L \int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon, \hat{\varepsilon}^K](x, 0) dx \\
& =: A + B + C + D + E.
\end{aligned} \tag{6.46}$$

Aus dem Hauptsatz und den Randbedingungen (3.7) und (3.37) bzw. (3.8) und (3.38) bzw. (3.9) und (3.39) folgt

$$\begin{aligned}
A &= L \sum_{m=1}^M \int_{(m-1)h}^{mh} ((\sigma(1, \tau) - \sigma_m^N)(v(1, \tau) - v_m^N) - (\sigma(0, \tau) - \sigma_m^0)(v(0, \tau) - v_m^0)) d\tau \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Für $x \in [x_{l-1}, x_l]$, $t \in [t_{m-1}, t_m]$ gilt

$$|\tilde{v}^K - \hat{v}^K| \leq |v_m^l - v_m^{l-1}| + |v_m^l - v_{m-1}^l|, \tag{6.48}$$

$$|\tilde{\sigma}^K - \hat{\sigma}^K| \leq |\sigma_m^l - \sigma_m^{l-1}| + |\sigma_m^{l-1} - \sigma_{m-1}^{l-1}|. \tag{6.49}$$

Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung und der Abschätzungen (6.13), (6.24), (6.48), (6.49), (6.7), (6.8), (6.23) und (6.12) folgt

$$\begin{aligned}
B &\leq Lt (\|\sigma_x\| + \|\tilde{\sigma}_x^K\|) \|\tilde{v}^K - \hat{v}^K\| + Lt (\|v_x\| + \|\tilde{v}_x^K\|) \|\tilde{\sigma}^K - \hat{\sigma}^K\| \\
&\leq 2Lt (\|\sigma_x\| + \|\tilde{\sigma}_x^K\|) \left(\max_{1 \leq m \leq M} \left(k^3 \sum_{l=1}^N (D_k v_m^l)^2 + h^2 k \sum_{l=1}^N (D_h v_m^l)^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + 2Lt (\|v_x\| + \|\tilde{v}_x^K\|) \left(\max_{1 \leq m \leq M} \left(k^3 \sum_{l=1}^N (D_k \sigma_m^l)^2 + h^2 k \sum_{l=1}^N (D_h \sigma_m^{l-1})^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2LT [(\|\sigma_x\| + \|\tilde{\sigma}_x^K\|) (k \|\tilde{v}_x^K\| + h \|\tilde{v}_t^K\|) + (\|v_x\| + \|\tilde{v}_x^K\|) (k \|\tilde{\sigma}_x^K\| + h \|\tilde{\sigma}_t^K\|)] \\
&= O(h + k).
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Aus Lemma A.0.18 sowie (6.8), (6.23) und den Abschätzungen (6.32), (6.34) und (6.35) folgt mit der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
C &\leq Lt (\|v_x\| + \|\tilde{v}_x^K\|) \|\hat{\sigma}^K - \mathfrak{H}[\hat{\varepsilon}^K]\| \\
&\leq Lt (\|v_x\| + \|\tilde{v}_x^K\|) \|\hat{\sigma}^K - \mathfrak{H}[\hat{\varepsilon}^K]\|_H = O(h + \delta).
\end{aligned} \tag{6.51}$$

Die Höldersche Ungleichung, Lemma 5.1.4 und die Abschätzungen (6.6), (6.9) zusammen mit der schwach*-Konvergenz der \hat{v}^K gegen v liefern

$$D \leq 2Lt^{\frac{1}{2}} \|g - g^K\|_{L^2((0,1) \times (0,T))} (\|v\| + \|\hat{v}^K\|) \leq O(h + k). \tag{6.52}$$

Aus der Voraussetzung 2 sowie den Anfangsbedingungen (3.5) und (3.36) folgt

$$\begin{aligned}
E &= L \int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon, \hat{\varepsilon}^K](x, 0) dx = L \int_0^1 |\mathfrak{V}[\varepsilon, \hat{\varepsilon}^K](x, 0) - \mathfrak{V}[\varepsilon, \varepsilon](x, 0)| dx \\
&\leq Le \int_0^1 (\max\{|\varepsilon(x, 0)|, |\hat{\varepsilon}^K(x, 0)|\} |\hat{\varepsilon}^K(x, 0) - \varepsilon(x, 0)|) dx \\
&\leq Le \sum_{l=1}^N \int_{x_{l-1}}^{x_l} (\max\{|\varepsilon_0(x)|, |\varepsilon_0(x_{l-1})|\} |\varepsilon_0(x_{l-1}) - \varepsilon_0(x)|) dx \\
&\leq Le \max_{x \in [0,1]} |\varepsilon_0(x)| \sum_{l=1}^N \int_{x_{l-1}}^{x_l} \int_{x_{l-1}}^{x_l} |\varepsilon'_0(\xi)| d\xi dx \\
&\leq Le \max_{x \in [0,1]} |\varepsilon_0(x)| \|\varepsilon'_0\|_{L^1(0,1)} k \leq Le \|\varepsilon_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2 k = O(k).
\end{aligned} \tag{6.53}$$

Außerdem gilt nach der Definition der diskreten Anfangsbedingungen (3.35)

$$\begin{aligned}
\|\hat{v}^K - v\|_{L^2(0,1)}^2(0) &= \sum_{l=1}^N \int_{x_{l-1}}^{x_l} (v_0^l - v_0(x))^2 dx = \sum_{l=1}^N \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left(\int_x^{x_l} v'_0(\xi) d\xi \right)^2 dx \\
&\leq k^2 \sum_{l=1}^N \int_{x_{l-1}}^{x_l} (v'_0(\xi))^2 d\xi \leq k^2 \|v_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2.
\end{aligned} \tag{6.54}$$

Aus den Definitionen (3.5) und (3.36) der Anfangswerte und der Lipschitz-Stetigkeit des Hysteresis-Operators nach Lemma 3.4.2 folgt

$$\begin{aligned}
&\|\sigma - \mathfrak{H}[\hat{\varepsilon}^K]\|_{L^2(0,1)}^2(0) \\
&= \sum_{l=1}^N \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left(\tilde{\mathcal{H}}_f(\varepsilon_0(x)) - \tilde{\mathcal{H}}_f(\varepsilon_0^{l-1}) \right)^2 dx \leq b^2 \sum_{l=1}^N \int_{x_{l-1}}^{x_l} (\varepsilon_0(x) - \varepsilon_0(x_{l-1}))^2 dx \\
&\leq b^2 k^2 \int_0^1 (\varepsilon'_0(\xi))^2 d\xi \leq k^2 b^2 \|\varepsilon_0\|_{W^{1,2}(0,1)}^2.
\end{aligned} \tag{6.55}$$

Insgesamt folgt aus den Abschätzungen (6.46), (6.47), (6.50), (6.51), (6.52), (6.53), (6.54), (6.55) sowie dem Einbettungslemma A.0.18 und den Abschätzungen (6.32), (6.34) und (6.35), wobei die Bezeichnungen aus (6.31) verwendet werden, für fast jedes $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned}
&L \|v - \hat{v}^K\|_{L^2(0,1)}^2(t) + \|\sigma - \hat{\sigma}^K\|_{L^2(0,1)}^2(t) \\
&\leq 2L \|v - \hat{v}^K\|_{L^2(0,1)}^2(t) + 2 \|\sigma - \mathfrak{H}[\hat{\varepsilon}^K]\|_{L^2(0,1)}^2(t) + 2 \|\mathfrak{H}[\hat{\varepsilon}^K] - \hat{\sigma}^K\|_{L^2(0,1)}^2(t) \\
&\leq 4(A + B + C + D + E) + 2L \|v - \hat{v}^K\|_{L^2(0,1)}^2(0) + 2 \|\sigma - \mathfrak{H}[\hat{\varepsilon}^K]\|_{L^2(0,1)}^2(0) \\
&+ 6 \|\mathfrak{H}[\hat{\varepsilon}^K] - s_0^K\|_{L^2(0,1)}^2(t) + 6 \|s_0^K - s_1^K\|_{L^2(0,1)}^2(t) + 6 \|s_1^K - \hat{\sigma}^K\|_{L^2(0,1)}^2(t) \\
&= O(h + k + \delta).
\end{aligned}$$

Da die Funktionen v , \hat{v}^K , σ und $\hat{s}^K \in C([0, T]; L^2(0, 1))$ sind, muß die Abschätzung sogar für jedes $t \in [0, T]$ gelten. Dies liefert die Fehlerabschätzung (6.44).

Jetzt folgt der Beweis der stetigen Abhängigkeit der Lösung von den Daten im Sinne der Abschätzung (6.45).

Wie in der Abschätzung (6.46) folgt mit partieller Integration, der Voraussetzung 3, den Einbettungslemmata A.0.17 und A.0.18, dem Hauptsatz, dem Satz von Fubini und der Voraussetzung 2 (i) sowie den Ausgangsgleichungen (3.1) - (3.3) und den Randbedingungen (3.7) bzw. (3.8) bzw. (3.9) für fast jedes $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(L \|v_1 - v_2\|_{L^2(0,1)}^2(t) + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^2(0,1)}^2(t) \right. \\
& \quad \left. - L \|v_1 - v_2\|_{L^2(0,1)}^2(0) - \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^2(0,1)}^2(0) \right) \\
&= L \int_0^t \int_0^1 (v_{1,t} - v_{2,t})(v_1 - v_2) dx d\tau \\
& \quad + \frac{1}{2} \left(\|\mathfrak{H}[\varepsilon_1] - \mathfrak{H}[\varepsilon_2]\|_{L^2(0,1)}^2(t) - \|\mathfrak{H}[\varepsilon_1] - \mathfrak{H}[\varepsilon_2]\|_{L^2(0,1)}^2(0) \right) \\
&\leq L \int_0^t \int_0^1 (v_{1,t} - v_{2,t})(v_1 - v_2) dx d\tau \\
& \quad + L \left(\int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x, t) dx - \int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x, 0) dx \right) + L \int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x, 0) dx + 0 \\
&= L \int_0^t \int_0^1 (\sigma_{1,x} + g_1 - \sigma_{2,x} - g_2)(v_1 - v_2) dx d\tau \\
& \quad + L \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \mathfrak{V}[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x, \tau) \right) d\tau dx + L \int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x, 0) dx \\
&\leq L \int_0^t \int_0^1 (\sigma_{1,x} - \sigma_{2,x})(v_1 - v_2) dx d\tau + L \int_0^t \int_0^1 (g_1 - g_2)(v_1 - v_2) dx d\tau \\
& \quad + L \int_0^t \int_0^1 (\varepsilon_{1,t} - \varepsilon_{2,t})(\sigma_1 - \sigma_2) dx d\tau + L \int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x, 0) dx \\
&= L \int_0^t \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} ((\sigma_1 - \sigma_2)(v_1 - v_2)) dx d\tau \\
& \quad + L \int_0^t \int_0^1 (g_1 - g_2)(v_1 - v_2) dx d\tau + L \int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x, 0) dx \\
&= 0 + L \int_0^t \int_0^1 (g_1 - g_2)(v_1 - v_2) dx d\tau + L \int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x, 0) dx \\
&=: \tilde{D} + \tilde{E}.
\end{aligned} \tag{6.56}$$

Aus der Hölderschen und der Youngschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{D} &= L \int_0^t \int_0^1 (v_1 - v_2)(g_1 - g_2) dx d\tau \\
&\leq L \sqrt{t} \max_{\tau \in [0, t]} \left(\int_0^1 (v_1 - v_2)^2(x, \tau) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^1 (g_1 - g_2)^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{L}{4} \max_{\tau \in [0, T]} \|v_1 - v_2\|_{L^2(0,1)}^2(\tau) + LT \|g_1 - g_2\|_{L^2((0,1) \times (0,T))}^2.
\end{aligned} \tag{6.57}$$

Aus der Voraussetzung 2 (ii) und (iii) sowie der Anfangsbedingung (3.5) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \tilde{E} &= L \int_0^1 \mathfrak{V}[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x, 0) dx = L \int_0^1 |\mathfrak{V}[\varepsilon_1, \varepsilon_2](x, 0) - \mathfrak{V}[\varepsilon_2, \varepsilon_2](x, 0)| dx \\
 &\leq Le \int_0^1 \max\{|\varepsilon_{0,1}(x)|, |\varepsilon_{0,2}(x)|\} |\varepsilon_{0,1}(x) - \varepsilon_{0,2}(x)| dx \\
 &\leq Le |\varepsilon_0|_\infty \|\varepsilon_{0,1} - \varepsilon_{0,2}\|_{L^1(0,1)} .
 \end{aligned} \tag{6.58}$$

Insgesamt folgt unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (3.4) - (3.6), der Lipschitz-Stetigkeit des Hysterese-Operators nach Voraussetzung 1 (iii) sowie den Abschätzungen (6.56), (6.57) und (6.58)

$$\begin{aligned}
 &\max_{t \in [0, T]} \left(\frac{L}{2} \|v_1 - v_2\|_{L^2(0,1)}^2(t) + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^2(0,1)}^2(t) \right) \\
 &\leq L \|v_{0,1} - v_{0,2}\|_{L^2(0,1)}^2 + b^2 \|\varepsilon_{0,1} - \varepsilon_{0,2}\|_{L^2(0,1)}^2 + 2Le |\varepsilon_0|_\infty \|\varepsilon_{0,1} - \varepsilon_{0,2}\|_{L^1(0,1)} \\
 &\quad + 2LT \|g_1 - g_2\|_{L^2((0,1) \times (0,T))}^2 .
 \end{aligned}$$

Dies liefert die Abschätzung (6.45). □

Kapitel 7

Ein Beispielpproblem

Zum Abschluß dieser Arbeit diskutieren wir ein Beispiel zur Wellengleichung mit Hysterese. Es ist so gewählt, daß wir die exakte Lösung analytisch bestimmen können. Wir geben die exakte Lösung an, berechnen die numerische Lösung mit unserem Finite-Differenzen-Schema und vergleichen die Lösungen.

Wir betrachten das im Abschnitt 3.1 eingeführte Problem (P_B) für eine verschwindende Kraftdichte g und die Anfangswerte

$$\begin{aligned} v_0(x) &= V_0(1-x), \quad V_0 > 0, \\ \varepsilon_0(x) &= 0, \end{aligned}$$

wobei das Materialgesetz durch den Stop-Operator gegeben sei

$$\mathcal{H}[\varepsilon(x, \cdot)] = \mathfrak{s}_r[\varepsilon(x, \cdot)].$$

Als approximierende Operatoren wählen wir für alle $\delta \geq 0$

$$\mathcal{H}^\delta = \mathfrak{s}_r.$$

Nach dem Satz 6.2.3 ist die Lösung des Problems eindeutig. Wie im Beispiel 3.3.3 läßt sich folgern, daß die Voraussetzung 2 erfüllt ist.

Nach der Definition unseres Lösungsbegriffs in Verbindung mit dem Einbettungslemma A.0.19 sind die Lösungskomponenten $\sigma, v \in C((0, 1) \times (0, T))$.

Da $(\bar{v}, \bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}) \equiv (V_0, 0, 0)$ die Lösung des Problems zu den Anfangswerten $\bar{v}(x, 0) = \bar{v}_0(x) = V_0$, $\bar{\varepsilon}(x, 0) = \bar{\varepsilon}_0(x) = 0$ ist, gilt die Symmetriebeziehung

$$v(1-x, t) = V_0 - v(x, t), \tag{7.1}$$

$$\sigma(1-x, t) = \sigma(x, t), \tag{7.2}$$

$$\varepsilon(1-x, t) = \varepsilon(x, t). \tag{7.3}$$

Das Gebiet $\Omega_T := (0, 1) \times (0, T)$ zerfällt in zwei disjunkte Teilmengen, die elastische Menge E und die plastische Menge P

$$E := \{(x, t) \in \Omega_T : \sigma(x, t) \in (-r, r)\},$$

$$P := \{(x, t) \in \Omega_T : \sigma(x, t) \in \{-r, r\}\}.$$

Die Menge E ist offen und P ist abgeschlossen. In der elastischen Menge E gilt nach der Definition des Stop-Operators \mathfrak{s}_r

$$\varepsilon_t = \sigma_t .$$

Damit reduzieren sich die Gleichungen (3.1) - (3.2) zum Problem (P_B) in E auf das lineare Problem

$$\sigma_t = v_x , \quad (7.4)$$

$$v_t = \sigma_x . \quad (7.5)$$

Da σ stetig ist, muß σ auf jeder Zusammenhangskomponente von P konstant sein. Die Gleichungen (3.1) - (3.2) reduzieren sich im Inneren von P also auf

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= v_x , \\ v_t &= 0 , \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\sigma_t = 0 . \quad (7.7)$$

Durch die Variablentransformation

$$p := v + \sigma ,$$

$$q := v - \sigma ,$$

läßt sich das Gleichungssystem (7.4) - (7.7) schreiben als

$$\begin{aligned} p_t - p_x &= 0 \quad \text{in } E , & p_t &= 0 \quad \text{in } P , \\ q_t + q_x &= 0 \quad \text{in } E , & q_t &= 0 \quad \text{in } P . \end{aligned}$$

Auf den linkslaufenden Charakteristiken $(x_-(t), t)_{(x_0, t_0)}$, die durch

$$\begin{aligned} x_-(t_0) &= x_0 , \\ x'_-(t) &= \begin{cases} -1 , & \text{falls } (x_-(t), t) \in E , \\ 0 , & \text{sonst ,} \end{cases} \end{aligned}$$

definiert sind, ist p konstant. Auf den rechtslaufenden Charakteristiken $(x_+(t), t)_{(x_0, t_0)}$, die durch

$$\begin{aligned} x_+(t_0) &= x_0 , \\ x'_+(t) &= \begin{cases} 1 , & \text{falls } (x_+(t), t) \in E , \\ 0 , & \text{sonst ,} \end{cases} \end{aligned}$$

definiert sind, ist q konstant. Ein Punkt (x, τ) ist genau dann aus P , wenn es zwei Startpunkte (x_0, t_0) und (x_1, t_1) gibt, so daß für die zugehörige links- bzw. rechtslaufende Charakteristik $(x_-(t), t)_{(x_0, t_0)}$ und $(x_+(t), t)_{(x_1, t_1)}$ gilt

$$x_-(\tau) = x = x_+(\tau)$$

und

$$|p(x_0, t_0) - q(x_1, t_1)| = 2r.$$

Mit Hilfe der Charakteristiken sowie der Anfangs- und Randwerte läßt sich eine Lösung des Problems bestimmen.

Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} x_0 &:= t_0 := 0, \\ x_1 &:= t_1 := \frac{r}{V_0}, \end{aligned}$$

und für $j > 0$

$$\begin{aligned} x_{j+1} &:= x_j + 2\frac{r}{V_0} = (2j+1)\frac{r}{V_0}, \\ t_{j+1} &:= t_j + x_{j+1} + x_j = t_j + 4j\frac{r}{V_0} = (j^2 + (j+1)^2)\frac{r}{V_0}. \end{aligned}$$

Sei $M := \text{int}(\frac{V_0}{4r} + \frac{1}{2})$, wobei $\text{int}(x)$ den ganzzahligen Anteil von x bezeichne. Es ist

$$x_M \leq \frac{1}{2} < x_{M+1}.$$

1. Fall: Sei $V_0 \geq 2r$.

Dann zerfällt die plastische Menge in die Zusammenhangskomponenten P_i , $i \geq 0$. Der Rand von P_0 ist gegeben durch

$$\partial P_0 = R_0 \cup R_1$$

mit

$$R_0 := \left\{ \left(x, \frac{r}{V_0} \right) : x \in \left[\frac{r}{V_0}, 1 - \frac{r}{V_0} \right] \right\}$$

und

$$R_1 := \left\{ (x, s(x)) : x \in \left[\frac{r}{V_0}, 1 - \frac{r}{V_0} \right] \right\},$$

wobei die Funktion s für $x \in [x_j, x_{j+1}] \cap \left[\frac{r}{V_0}, \frac{1}{2} \right]$, $j \in \{1, \dots, M\}$, definiert ist durch

$$s(x) := 2j(x - x_j) + t_j = 2jx + \frac{r}{V_0} (1 - 2j^2)$$

und für $x \in \left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{r}{V_0} \right]$ durch

$$s(x) := s(1 - x).$$

Dann ist

$$P_0 = \left\{ (x, t) : x \in \left[\frac{r}{V_0}, 1 - \frac{r}{V_0} \right], t \in \left[\frac{r}{V_0}, s(x) \right] \right\}.$$

Für $(x, t) \in P_0$ gilt

$$\begin{aligned}\sigma(x, t) &= -r, \\ v(x, t) &= V_0(1 - x), \\ \varepsilon(x, t) &= -V_0 t.\end{aligned}$$

Wir definieren

$$t_e := s\left(\frac{1}{2}\right) = 2M\left(\frac{1}{2} - x_M\right) + t_M$$

und die Teilmengen E_j , F_j , E'_j und F'_j von E durch

$$\begin{aligned}E_0 &:= \left\{ (x, t) \in \Omega_T : t - x \leq 0, t + x \leq 1, 0 < t < \frac{r}{V_0} \right\}, \\ E_j &:= \{(x, t) \in \Omega_T : t - x \leq x_j + t_j, t + x \geq x_j + t_j, s(x) < t \leq t_e\}, \quad \text{für } j \in \{1, \dots, M\}, \\ F_j &:= \{(x, t) \in \Omega_T : t - x > x_j + t_j, t + x < x_{j+1} + t_{j+1}, t \leq t_e\}, \quad \text{für } j \in \{0, \dots, M\}, \\ E'_j &:= \{(x, t) \in \Omega_T : (1 - x, t) \in E_j\}, \quad \text{für } j \in \{1, \dots, M\}, \\ F'_j &:= \{(x, t) \in \Omega_T : (1 - x, t) \in F_j\}, \quad \text{für } j \in \{0, \dots, M\}.\end{aligned}$$

Für $(x, t) \in F_j$, $j \in \{0, \dots, M\}$, ist

$$\begin{aligned}\sigma(x, t) &= -\frac{V_0}{2j+1}x, \\ v(x, t) &= -\frac{V_0}{2j+1}\left(t + 2j(j+1)\frac{r}{V_0}\right) + V_0.\end{aligned}$$

Für $(x, t) \in F'_j$, $j \in \{0, \dots, M\}$, ist

$$\begin{aligned}\sigma(x, t) &= \sigma(1 - x, t), \\ v(x, t) &= V_0 - v(1 - x, t).\end{aligned}$$

Für $(x, t) \in E_j$, $j \in \{0, \dots, M\}$, ist

$$\begin{aligned}\sigma(x, t) &= \frac{V_0}{4j^2 - 1}\left(-2jx + t - 2j^2\frac{r}{V_0}\right), \\ v(x, t) &= \frac{V_0}{4j^2 - 1}\left(x - 2jt - 2j(2j^2 - 1)\frac{r}{V_0}\right) + V_0.\end{aligned}$$

Für $(x, t) \in E'_j$, $j \in \{1, \dots, M\}$, ist

$$\begin{aligned}\sigma(x, t) &= \sigma(1 - x, t), \\ v(x, t) &= V_0 - v(1 - x, t).\end{aligned}$$

Damit sind die Funktionen v , σ auf $E \cap (0, 1) \times (0, t_e]$ erklärt. Es bleibt, die Funktionen v , σ auf $(0, 1) \times (t_e, T)$ zu bestimmen. Da die Funktionen $p(x, t_e)$, $q(x, t_e)$ auf $[0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ nur Werte aus dem Intervall $(\frac{V_0}{2} - r, \frac{V_0}{2} + r)$ annehmen und $p(\frac{1}{2}, t_e) = \frac{V_0}{2} - r$ sowie

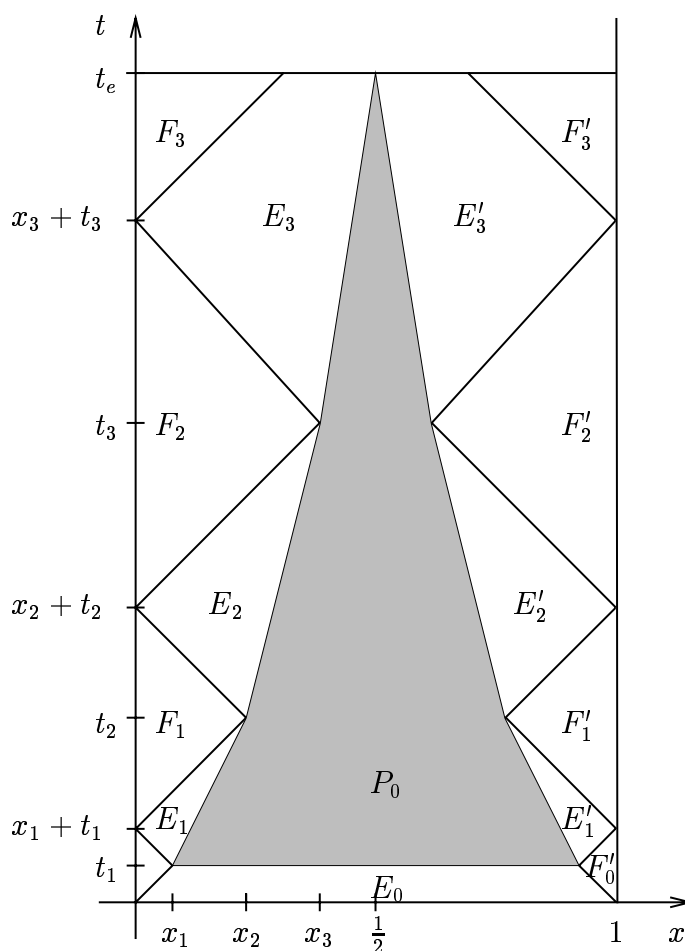


Abbildung 7.1: Das Raum-Zeit-Gebiet Ω_{t_e} für $\frac{r}{v_0} = \frac{1}{13}$. P_0 ist der Bereich der plastischen Verformung.

$q\left(\frac{1}{2}, t_e\right) = \frac{v_0}{2} + r$ ist, bestehen die Komponenten P_n , $n \geq 1$, der plastischen Menge jeweils aus den isolierten Punkten

$$P_n = \left(\frac{1}{2}, t_e + n\right), \quad \text{wobei } \sigma\left(\frac{1}{2}, t_e + n\right) = (-1)^{n-1} r$$

ist. Für $x \in [0, 1)$ definieren wir

$$F(x) := \frac{1}{2} (\sigma(x, t_e) + v(x, t_e)),$$

$$F(1+x) := \frac{V_0}{2} - F(x),$$

und setzen die Funktion F 2-periodisch auf \mathbb{R} fort. Der d'Alembertsche Lösungsansatz liefert unter Berücksichtigung der Randbedingungen und der Symmetriebeziehung (7.1)

für $(x, t) \in (0, 1) \times (t_e, T)$

$$\begin{aligned}\sigma(x, t) &= F(x + t - t_e) - F(-x + t - t_e), \\ v(x, t) &= F(x + t - t_e) + F(-x + t - t_e).\end{aligned}$$

2. Fall: Sei $V_0 < 2r$.

Dann ist $E = \Omega_T$ und $P = \emptyset$. Mit dem d'Alembertschen Lösungsansatz ergibt sich für alle $(x, t) \in \Omega_T$

$$\begin{aligned}\sigma(x, t) &= G(x + t) - G(-x + t), \\ v(x, t) &= G(x + t) + G(-x + t),\end{aligned}$$

wobei G eine 2-periodische Funktion ist mit

$$G(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}(\sigma(x, 0) + v(x, 0)) = \frac{V_0}{2}(1 - x), & \text{falls } x \in [0, 1), \\ \frac{V_0}{2} - F(x - 1) = \frac{V_0}{2}(x - 1), & \text{falls } x \in [1, 2). \end{cases}$$

Mit der Parameterwahl

$$\begin{aligned}r &= 1.0, \\ V_0 &= 13.0, \\ T &= 4.0,\end{aligned}$$

wurden die folgenden numerischen Resultate erzielt. Die Grafiken zeigen die mit unserem Finite-Differenzen-Schema aus dem Abschnitt 3.4 berechneten Näherungslösungen $\bar{\sigma}^K$, \bar{v}^K und die absoluten Fehler für eine Wahl von 128 Stützstellen im Ort und 4096 Stützstellen in der Zeit.

In unseren numerischen Tests zu verschiedenen Zeit- und Ortsschrittweiten haben wir die folgende sublineare Fehlerentwicklung beobachtet. Der Fehler wurde in der diskreten Supremums-Norm gemessen.

# Stützstellen im Ort	# Stützstellen in der Zeit	abs. Fehler $\ \sigma - \bar{\sigma}^K\ _\infty$	abs. Fehler $\ v - \bar{v}^K\ _\infty$	rel. Fehler $\frac{\ \sigma - \bar{\sigma}^K\ _\infty}{\ \sigma\ _\infty}$	rel. Fehler $\frac{\ v - \bar{v}^K\ _\infty}{\ v\ _\infty}$
16	512	0.221532	0.610389	0.221532	0.050083
32	1024	0.150131	0.338367	0.150131	0.027763
64	2048	0.101984	0.190382	0.101984	0.015621
128	4096	0.069241	0.110142	0.069241	0.009037
256	8192	0.046036	0.064296	0.046036	0.005276

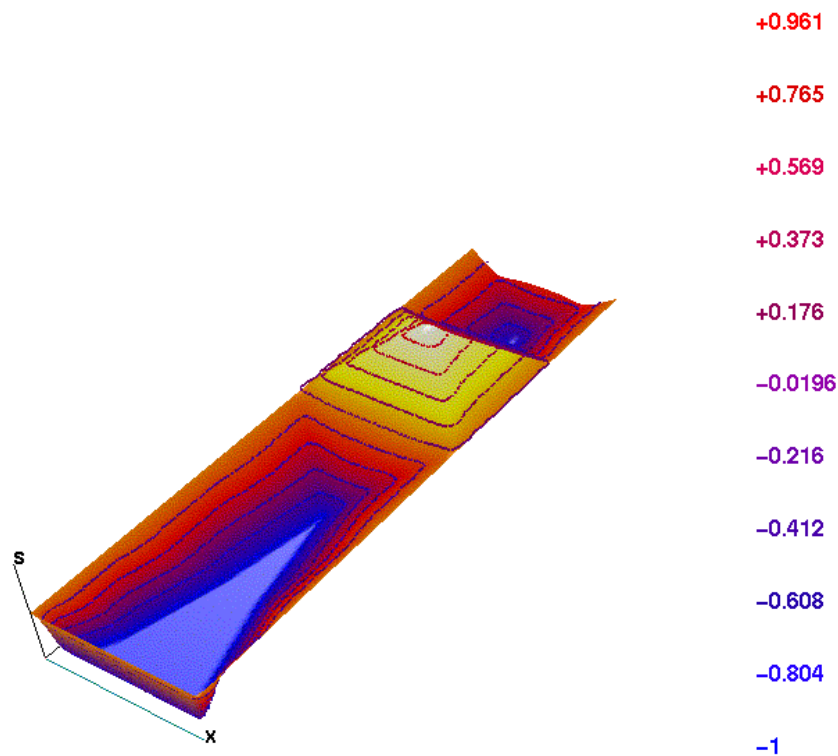


Abbildung 7.2: Evolution der Spannung $\bar{\sigma}^K$ von $t = 0$ (links unten) bis $t = T$ (rechts oben)

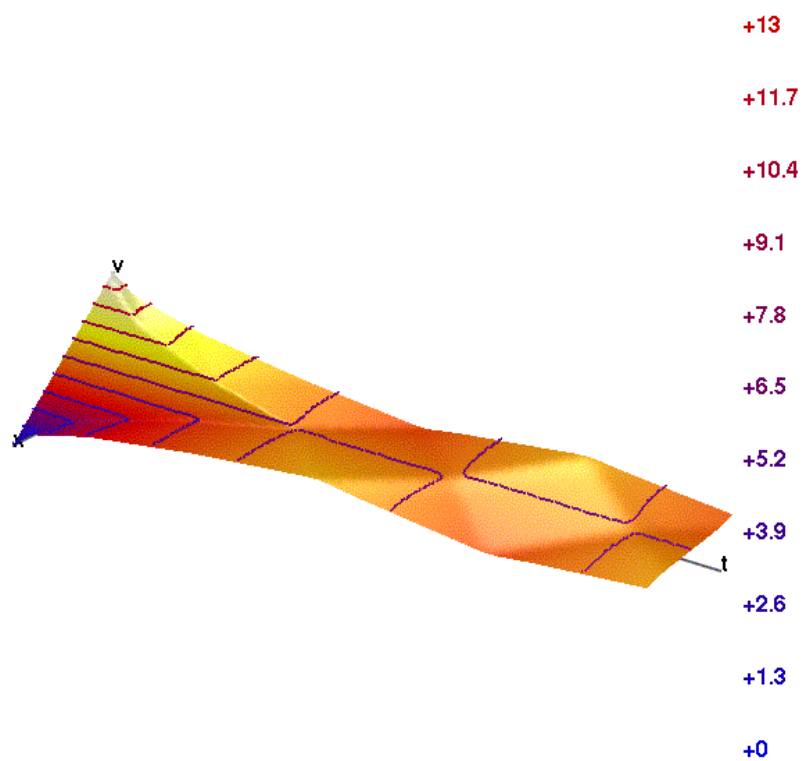


Abbildung 7.3: Evolution der Geschwindigkeit \bar{v}^K von $t = 0$ (links oben) bis $t = T$ (rechts unten)

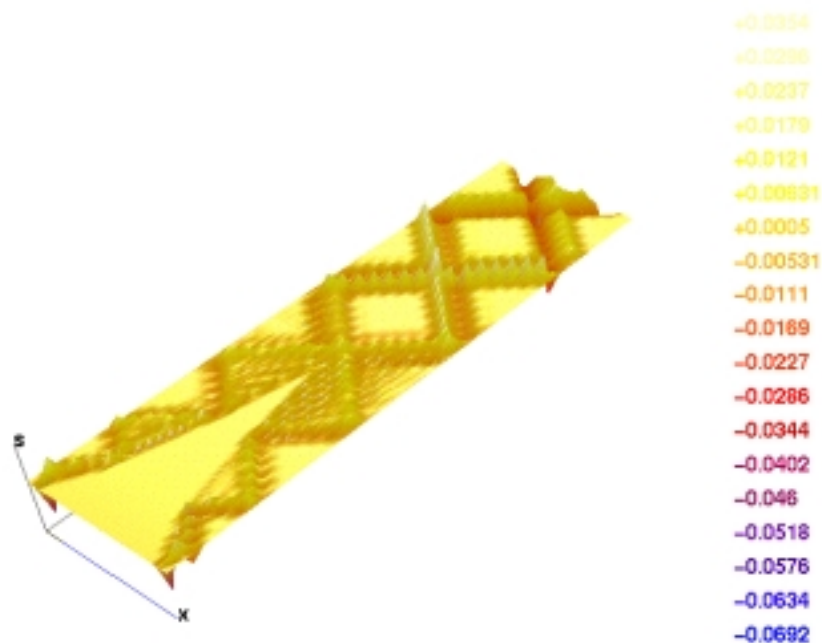


Abbildung 7.4: Evolution des absoluten Fehlers in der Spannung $\sigma - \bar{\sigma}^K$ von $t = 0$ (links unten) bis $t = T$ (rechts oben)

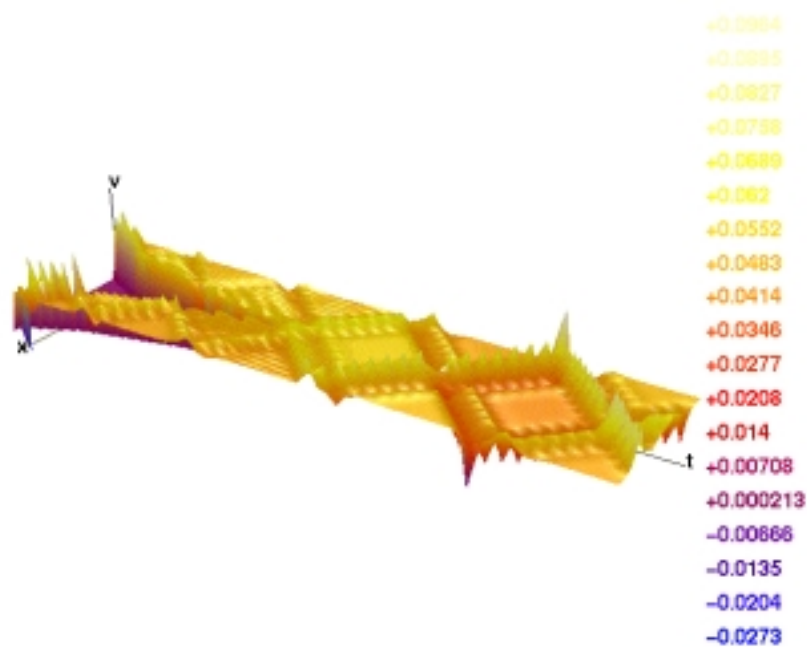


Abbildung 7.5: Evolution des absoluten Fehlers in der Geschwindigkeit $v - \bar{v}^K$ von $t = 0$ (links oben) bis $t = T$ (rechts unten)

Anhang A

Grundlagen

In diesem Kapitel bezeichnen a, b, c, d reelle Zahlen und T eine positive, reelle Zahl.

Definition A.0.2 Sei $a < b$. Zu der Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und der Zerlegung $Z := \{r_0, \dots, r_n\}$ von $[a, b]$, $a = r_0 < r_1 < \dots < r_n = b$ für ein $n \in \mathbb{N}$, definieren wir

$$v_g(Z) := \sum_{i=1}^n |g(r_i) - g(r_{i-1})|.$$

Falls die Variation von g

$$\text{Var}[g] := \sup_Z v_g(Z) < \infty$$

ist, heißt g von **beschränkter Variation**.

Die Menge aller Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ von beschränkter Variation bezeichnen wir mit $BV(a, b)$. Die Menge $BV(a, \infty)$ enthalte alle Funktionen $h, h : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ für die gilt

$$\text{Var}[h] := \sup_{b > a} \text{Var}[h|_{[a, b]}] < \infty.$$

Bemerkung A.0.3 $\text{Var}[h|_{[a, b]}]$ ist eine in b monoton wachsende Funktion. Ist $h \in BV(a, \infty)$, dann existiert der Grenzwert $\lim_{r \rightarrow \infty} h(r)$.

Definition und Satz A.0.4 Sei $a < b$. Zu den Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, der Zerlegung $Z := \{r_0, \dots, r_n\}$ von $[a, b]$, $a = r_0 < \dots < r_n = b$ für ein $n \in \mathbb{N}$, und einem zugehörigen Zwischenvektor $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi_i \in [r_{i-1}, r_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$, heißt

$$S_g(f, Z, \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(r_k) - g(r_{k-1}))$$

Riemann-Stieltjes-Summe von f bezüglich g . Sei $|Z| := \max_{k \in \{1, \dots, n\}} |r_k - r_{k-1}|$. Ist $f \in C([a, b])$ und $g \in BV(a, b)$, dann existiert der eindeutige Grenzwert

$$\int_a^b f(r) dg(r) := \lim_{|Z| \rightarrow 0} S_g(f, Z, \xi)$$

und heißt **Riemann-Stieltjes-Integral** von f bezüglich der Verteilungsfunktion g . (vgl. [Heu88, Kap.90, Satz 92.1])

Bemerkung A.0.5 Im Falle $g(x) \equiv x$ geht das Riemann-Stieltjes-Integral in das Riemann-Integral über.

Der Beweis des folgenden Satzes findet sich in [Heu88, Satz 90.2].

Satz A.0.6 (Partielle Integration von Riemann-Stieltjes Integralen) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Mit $\int_a^b f(r)dg(r)$ existiert auch $\int_a^b g(r)df(r)$, und es gilt

$$\int_a^b f(r)dg(r) + \int_a^b g(r)df(r) = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Definition A.0.7 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **absolut stetig** auf I , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$\sum_{j=1}^m |f(b_j) - f(a_j)| < \epsilon$$

ist für jede endliche Familie $\{(a_j, b_j) : j \in \{1, \dots, m\}\}$ beschränkter und paarweise disjunkter Teilintervalle von I mit

$$\sum_{j=1}^m (b_j - a_j) < \delta.$$

Definition A.0.8 Sei $a < b$. Die Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ und für alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \quad (\text{A.1})$$

f heißt **konkav**, falls $-f$ konvex ist.

Aus der Definition A.0.8 ergibt sich unmittelbar das folgende Korollar.

Korollar A.0.9 Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und konvex, dann ist f' monoton wachsend und für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ gilt

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

Wir werden jetzt Funktionen mit Werten in einem Banach-Raum einführen. Ausführlichere Erläuterungen finden sich zum Beispiel in [Bre73, Appendice], [GGZ74, Kap. IV] und [K96, Chap. V].

Definition A.0.10 Seien X ein reeller Banach-Raum mit Norm $\|\cdot\|_X$, $a < b$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$. Auf der Klasse der (Bochner-)meßbaren Funktionen $u : [a, b] \rightarrow X$ führen wir eine Äquivalenzrelation ein, indem wir definieren:

$$u \sim v \quad : \Longleftrightarrow \quad u(t) = v(t) \text{ für fast alle } t \in [a, b].$$

Wir definieren die Funktionenräume, wobei wir jede meßbare Funktion mit ihrer Äquivalenzklasse identifizieren,

$$\begin{aligned}
L^p(a, b; X) &:= \{u : [a, b] \rightarrow X : \|u\|_{L^p(a, b; X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}, \\
L^\infty(a, b; X) &:= \{u : [a, b] \rightarrow X : \|u\|_{L^\infty(a, b; X)} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in [a, b]} \|u(t)\|_X < \infty\}, \\
\text{wobei } \operatorname{ess\,sup}_{t \in [a, b]} \|u(t)\|_X &:= \inf_{\substack{M \subset [a, b], \\ M \text{ Nullmenge}}} \{ \sup\{\|u(t)\|_X : t \in [a, b] \setminus M\} \}, \\
C^m([a, b]; X) &:= \{u : [a, b] \rightarrow X : u \text{ ist stetig und besitzt stetige Ableitungen} \\
&\quad \text{bis zur Ordnung } m\}.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Wir nennen $v \in L^1(a, b; X)$ **schwache Ableitung** von $u \in L^1(a, b; X)$, wenn in $C^1([a, b]; X)$ eine Folge $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, so daß gilt

$$w_n \rightarrow u \quad \text{und} \quad w'_n \rightarrow v \quad \text{in } L^1(a, b; X) \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

und setzen $u' := v$. Für $1 \leq p \leq \infty$ definieren wir

$$W^{1,p}(a, b; X) := \{u \in L^p(a, b; X) : u' \in L^p(a, b; X)\}. \tag{A.3}$$

Für $u \in W^{1,p}(a, b; X)$ sei

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W^{1,p}(a, b; X)} &:= \left(\|u\|_{L^p(a, b; X)}^p + \|u'\|_{L^p(a, b; X)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{falls } 1 \leq p < \infty, \\
\|u\|_{W^{1,\infty}(a, b; X)} &:= \max \{ \|u\|_{L^\infty(a, b; X)}, \|u'\|_{L^\infty(a, b; X)} \}.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Ist $(X, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, dann benutzen wir auch die Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
C^m([a, b]) &:= C^m([a, b]; \mathbb{R}), \quad m \in \mathbb{N}_0, \\
L^p(a, b) &:= L^p(a, b; \mathbb{R}), \quad \|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L^p(a, b; \mathbb{R})}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \\
W^{1,p}(a, b) &:= W^{1,p}(a, b; \mathbb{R}), \quad \|\cdot\|_{1,p} := \|\cdot\|_{W^{1,p}(a, b; \mathbb{R})}, \quad 1 \leq p \leq \infty.
\end{aligned}$$

Wir setzen $C([a, b]; X) := C^0([a, b]; X)$ und $C([a, b]) := C^0([a, b])$.

Der folgende Satz ergibt sich aus [Bre73, App. 2].

Satz A.0.11 *Seien a, b reelle Zahlen, $a < b$, und $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion u ist genau dann aus $W^{1,1}(a, b)$, wenn sie absolut stetig ist.*

Definition A.0.12 Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ reelle Banach-Räume. Wir sagen, daß

- (i) Y in X **einbettet** und bezeichnen dies durch $Y \hookrightarrow X$, falls $Y \subset X$ ist und es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für alle $u \in Y$ gilt

$$\|u\|_X \leq C \|u\|_Y,$$

- (ii) Y **kompakt in X einbettet** und bezeichnen dies durch $Y \hookrightarrow X$, falls $Y \hookrightarrow X$ und jede in Y beschränkte Menge relativ kompakt in X ist.

Definition A.0.13 Sei (X, d) ein metrischer Raum. X heißt **separabel**, falls X eine abzählbare dichte Menge enthält.

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum. Der Raum $X^* = L(X, \mathbb{R})$ der stetigen linearen Funktionale auf X heißt **der zu X duale Raum**.

Der Banach-Raum X heißt **reflexiv**, wenn $X = X^{**}$ bezüglich der kanonischen Einbettung ist.

Der Beweis der folgenden Proposition findet sich in [GGZ74, Sätze IV.1.1, IV.1.11, IV.1.12] und [Alt92, Satz 8.8].

Proposition A.0.14 Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ reelle Banach-Räume und $1 \leq p \leq \infty$. Es gilt:

- (i) $(C([a, b]; X), \|\cdot\|_{L^\infty(a, b; X)})$ ist ein reeller Banach-Raum.
- (ii) $(L^p(a, b; X), \|\cdot\|_{L^p(a, b; X)})$ ist ein reeller Banach-Raum.
 - Ist X separabel und $1 \leq p < \infty$, dann ist $L^p(a, b; X)$ separabel.
 - Ist X reflexiv und $1 < p < \infty$, dann ist $L^p(a, b; X)$ reflexiv.
- (iii) $(W^{1,p}(a, b; X), \|\cdot\|_{W^{1,p}(a, b; X)})$ ist ein reeller Banach-Raum.
- (iv) Wenn $Y \hookrightarrow X$ gilt, dann ist für $1 \leq q \leq r \leq \infty$ auch $L^r(a, b; Y) \hookrightarrow L^q(a, b; X)$.
- (v) Für $p > 1$ gilt: $W^{1,p}(a, b) \hookrightarrow C([a, b])$.

Der Beweis des folgenden Satzes findet sich in [Zei90a, Prop. 23.23(iv)].

Proposition A.0.15 (partielle Integrationsformel) Sei $u \in W^{1,2}(0, T; L^2(0, 1))$. Dann gilt für beliebige s, t mit $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\|u\|_{L^2(0,1)}^2(t) - \|u\|_{L^2(0,1)}^2(s) = 2 \int_s^t \left(\int_0^1 u_t(x, \tau) u(x, \tau) dx \right) d\tau.$$

Der Beweis des folgenden Satzes findet sich zum Beispiel in [Alt92, A 4.10].

Satz A.0.16 (Satz von Fubini) Seien $a < b$, $c < d$, $1 \leq p \leq \infty$ und λ^n , $n \geq 1$, das n -dimensionale Lebesgue-Maß.

Dann existiert ein isometrischer Isomorphismus von $L^p((a, b) \times (c, d))$ auf $L^p(a, b; L^p(c, d))$. Es ist also

$$L^p((a, b) \times (c, d)) \hookrightarrow L^p(a, b; L^p(c, d)) \quad \text{und} \quad L^p(a, b; L^p(c, d)) \hookrightarrow L^p((a, b) \times (c, d)).$$

Für jedes $f \in L^p((a, b) \times (c, d))$ existiert

$$F(x) := \int_c^d f(x, y) d\lambda(y) \quad \text{für fast alle } x \in (a, b),$$

und es ist $F \in L^p(a, b)$ mit

$$\int_a^b F(x) d\lambda(x) = \int_{(a,b) \times (c,d)} f(x, y) d\lambda^2(x, y).$$

Insbesondere gilt also aus Symmetriegründen

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y).$$

Lemma A.0.17 *Es gilt*

$$W^{1,\infty}(0, T; L^2(0, 1)) \hookrightarrow L^2(0, 1; W^{1,2}(0, T)) \hookrightarrow L^2(0, 1; C([0, T])).$$

Beweis:

Sei $u \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(0, 1))$. u hat also eine schwache Ableitung u' und es gilt $u, u' \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$.

Aus Proposition A.0.14 (iv) und aus dem Satz von Fubini A.0.16 folgt

$$L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(0, 1)) \hookrightarrow L^2((0, 1) \times (0, T)) \hookrightarrow L^2(0, 1; L^2(0, T)).$$

Es ist also $u \in L^2(0, 1; W^{1,2}(0, T))$.

Wegen Satz A.0.11 ist $W^{1,1}(0, T) \subset C([0, T])$. Für jedes $0 \leq s, t \leq T$ und $u \in W^{1,1}(0, T)$ gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_{C([0,T])} &= \max_{t \in [0,T]} |u(t)| = \max_{t \in [0,T]} \left| u(s) + \int_s^t u'(\tau) d\tau \right| \\ &\leq |u(s)| + \max_{t \in [0,T]} \left| \int_s^t u'(\tau) d\tau \right| \leq |u(s)| + \int_0^T |u'(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Integration über $[0, T]$ liefert

$$\|u\|_{C([0,T])} \leq \frac{1}{T} \int_0^T |u(s)| ds + \int_0^T |u'(\tau)| d\tau \leq \max\left\{\frac{1}{T}, 1\right\} \|u\|_{W^{1,1}(0,T)}.$$

Also bettet $W^{1,1}(0, T)$ in $C([0, T])$ ein.

Aus Proposition A.0.14 folgt

$$L^2(0, 1; W^{1,2}(0, T)) \hookrightarrow L^2(0, 1; C([0, T])),$$

und damit

$$W^{1,\infty}(0, T; L^2(0, 1)) \hookrightarrow L^2(0, 1; C([0, T])).$$

□

Lemma A.0.18 *Sei $1 \leq p < \infty$. Es gilt*

$$L^p(0, 1; C([0, T])) \hookrightarrow L^\infty(0, T; L^p(0, 1)),$$

wobei für alle $u \in L^p(0, 1; C([0, T]))$ gilt

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^p(0,1))} \leq \|u\|_{L^p(0,1;C([0,T]))}.$$

Beweis:

Da $C([0, T]) \hookrightarrow L^p(0, T)$ für jedes p , folgt aus Proposition A.0.14 und aus dem Satz von Fubini A.0.16

$$L^p(0, 1; C([0, T])) \hookrightarrow L^p(0, 1; L^p(0, T)) \hookrightarrow L^p((0, 1) \times (0, T)) \hookrightarrow L^p(0, T; L^p(0, 1)).$$

Ist $u \in L^p(0, 1; C([0, T]))$, dann ist insbesondere $u(\cdot, t) \in L^p(0, 1)$ für fast alle $t \in (0, T)$. Da für jedes $t \in (0, T)$ gilt

$$|u|^p(\cdot, t) \leq \sup_{\tau \in [0, T]} |u|^p(\cdot, \tau),$$

folgt

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(0, T; L^p(0, 1))}^p &= \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \int_0^1 |u|^p(x, t) dx \\ &\leq \int_0^1 \sup_{t \in [0, T]} |u|^p(x, t) dx = \|u\|_{L^p(0, 1; C([0, T]))}^p. \end{aligned}$$

□

Der Beweis des folgenden Lemmas findet sich in [K96, Cor. V.2.5].

Lemma A.0.19 *Es gilt*

$$V = W^{1,\infty}(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^\infty(0, T; W^{1,2}(0, 1)) \hookrightarrow C([0, 1] \times [0, T]).$$

Definition A.0.20 Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller Banach-Raum und $X^* := L(X, \mathbb{R})$ der zu X duale Raum von X . Ist $x \in X$ und $f \in X^*$, so schreiben wir

$$\langle x, f \rangle := f(x).$$

und bezeichnen dies auch als duale Paarung von f und u .

Wir sagen, daß

- (i) eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X **schwach** gegen $x \in X$ **konvergiert** und bezeichnen dies durch $x_k \rightharpoonup x$ in X für $k \rightarrow \infty$, falls

$$\langle x_k, f \rangle \rightarrow \langle x, f \rangle \quad \text{für alle } f \in X^*.$$

- (ii) eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X^* **schwach*** gegen $f \in X^*$ **konvergiert** und bezeichnen dies durch $f_k \xrightarrow{*} f$ in X^* für $k \rightarrow \infty$, falls

$$\langle x, f_k \rangle \rightarrow \langle x, f \rangle \quad \text{für alle } x \in X.$$

- (iii) eine Menge $M \subset X$ (bzw. X^*) **schwach** (bzw. **schwach***) **folgenkompakt** ist, falls jede Folge in M eine schwach (bzw. schwach*) konvergente Teilfolge besitzt, deren Limes wieder in M liegt.

Bemerkung A.0.21

- Normkonvergenz impliziert schwache (bzw. schwach*) Konvergenz.
- Aus $f_k \xrightarrow{*} f$ in X^* für $k \rightarrow \infty$ folgt

$$\|f\|_{X^*} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{X^*}.$$

- Aus $x_k \rightharpoonup x$ in X für $k \rightarrow \infty$ folgt

$$\|x\|_X \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_X.$$

- Es gelte $x_k \rightarrow x$ in X und $f_k \xrightarrow{*} f$ in X^* . Dann folgt

$$\langle x_k, f_k \rangle \rightarrow \langle x, f \rangle \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Dasselbe folgt, wenn $x_k \rightharpoonup x$ in X und $f_k \rightarrow f$ in X^* .

Der Beweis des folgenden Satzes findet sich in [Alt92, Sätze 5.4, 5.7]. Die erste Aussage des Satzes ist ein Spezialfall des Satzes von Alaoglu.

Satz A.0.22 $(X, \|\cdot\|_X)$ sei ein separabler Banach-Raum. Dann ist jede abgeschlossene Kugel in X^* schwach* folgenkompakt.

$(X, \|\cdot\|_X)$ sei ein reflexiver Banach-Raum. Dann ist jede abgeschlossene Kugel in X schwach folgenkompakt.

Der Beweis des folgenden Lemmas findet sich in [Zei90a, Prop. 18.2].

Lemma A.0.23 (Hauptlemma der Variationsrechnung) Sei G eine nichtleere und offene Menge, $G \subset \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$C_0^\infty(G) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_0^m(G),$$

mit $C_0^m(G) := \{u \in C^m(G) : \text{Der Träger von } u \text{ ist eine kompakte Teilmenge von } G\}$. Für $u \in L^2(G)$ gelte

$$\int_G u \varphi \, dx = 0 \quad \text{für jedes } \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Dann gilt für fast alle $x \in G$

$$u(x) = 0.$$

Literaturverzeichnis

- [Alb98] Hans-Dieter Alber, *Materials with memory*, Springer, Berlin 1998 .
- [Alt92] Hans Wilhelm Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, 2. Auflage, Springer, Berlin 1992 .
- [Bre73] Haim Brézis, *Opérateurs maximaux monotones*, North-Holland Math. Studies 5, Amsterdam 1973 .
- [BK98] Martin Brokate, Pavel Krejčí, *Wellposedness of kinematic hardening models in elastoplasticity*, Math. Model. and Numer. Anal. 32 (1998), no. 2, 177-209 .
- [BS96] Martin Brokate, Jürgen Sprekels, *Hysteresis and Phase Transitions*, Springer, Heidelberg 1996 .
- [BV89] Martin Brokate, Augusto Visintin, *Properties of the Preisach models for hysteresis*, J. Reine Angew. Math. 402 (1989), 1-40 .
- [DKT99] Pavel Drábek, Pavel Krejčí, Peter Takáč, *Nonlinear differential equations*, Research Notes in Mathematics, Vol. 404, Chapman & Hall/CRC, London 1999 .
- [DL72] Georges Duvaut, Jacques-Louis Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris 1972 .
- [E90] Lawrence C. Evans, *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*, CBMS Regional Conference Series in Math., Number 74, American Math. Society, Providence, Rhode Island 1990 .
- [E98] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Math. Society, Providence, Rhode Island 1998 .
- [FK99] Jan Franců, Pavel Krejčí, *Homogenization of scalar wave equations with hysteresis*, Contin. Mech. Thermodyn. 11 (1999), no. 6, 371-390 .
- [GGZ74] Herbert Gajewski, Konrad Gröger, Klaus Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin 1974 .
- [Hei93] Andreas Hein, *Numerische Behandlung eines Hysterese-Operators zur Modellierung plastischer Verformungen*, Diplomarbeit im Fach Technomathematik an der Universität Kaiserslautern im Juni 1993 .

- [Hes41] Magnus R. Hestenes, *Extension on the range of a differentiable function*, Duke J. Math. 8 (1941), 183-192.
- [Heu88] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, 5. Auflage, B.G.Teubner, Stuttgart 1980.
- [Hue91] Thomas Hütter, *Ein Verfahren zur näherungsweise Berechnung des Preisach-Operators mit Anwendungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Doktorarbeit im Fach Mathematik an der Technischen Universität Berlin, 1991.
- [KDEZLP70] M. A. Krasnosel'skiĭ, B. M. Darinskiĭ, I. V. Emelin, P. P. Zabreĭko, E. A. Lifsic, A. V. Pokrovskiĭ, *Hysterant operator*, Soviet Math. Dokl. 11 (1970), 29-33.
- [KP89] Mark A. Krasnosel'skiĭ, Aleksei V. Pokrovskiĭ, *Systems with hysteresis*, Springer, Berlin 1989.
- [K86] Pavel Krejčí, *Hysteresis and periodic solutions of semilinear and quasilinear wave equations*, Math. Z. 193 (1986), 247-264.
- [K88] Pavel Krejčí, *On Ishlinskii's model for non-perfectly elastic bodies*, Apl. mat. 33 (1988), 133-144.
- [K89] Pavel Krejčí, *Hysteresis operators - a new approach to evolution differential inequalities*, Comment. Math. Univ. Carolinae 30, (1989), 525-536.
- [K90] Pavel Krejčí, Vladimír Lovicar, *Continuity of hysteresis operators in Sobolev spaces*, Apl. Mat. 35 (1990), 60-66.
- [K91] Pavel Krejčí, *Vector Hysteresis Models*, European Jnl of Applied Mathematics 2 (1991), 281-292.
- [K93] Pavel Krejčí, *Global behaviour of solutions to the wave equation with hysteresis*, Adv. Math. Sci. Appl. 2 (1993), 1-23.
- [K96] Pavel Krejčí, *Hysteresis, convexity and dissipation in hyperbolic equations*, Gakkōtoshō Int. Series Math. Sci. & Appl., Vol. 8, Gakkōtoshō, Tokyo 1996.
- [KS97] Pavel Krejčí, Jürgen Sprekels, *On a system of nonlinear PDE's with temperature-dependent hysteresis in one-dimensional thermoplasticity*, J. Math. Anal. Appl. 209 (1997), no. 1, 25-46.
- [KS98] Pavel Krejčí, Jürgen Sprekels, *Temperature-dependent hysteresis in one-dimensional thermovisco-elastoplasticity*, Appl. Math. 43 (1998), no. 3, 173-205.
- [KSZ99] Pavel Krejčí, Jürgen Sprekels, Songmu Zheng, *Asymptotic behaviour for a phase-field system with hysteresis*, WIAS-preprint No. 520, Berlin 1999.
- [LC90] Jean Lemaitre, Jean-Louis Chaboche, *Mechanics of solid materials*, Cambridge University Press, Cambridge 1990.

- [Mau92] Gérard A. Maugin, *The thermomechanics of plasticity and fracture*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge 1992.
- [May91] Isaak D. Mayergoyz, *Mathematical models of hysteresis*, Springer, New York 1991.
- [OR70] James M. Ortega, Werner C. Rheinboldt, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, New York 1970.
- [RR93] Michael Renardy, Robert C. Rogers, *An introduction to partial differential equations*, Texts in Applied Math. 13, Springer, New York 1993.
- [T87] Giovanni Maria Troianiello, *Elliptic differential equations and obstacle problems*, The Univ. Series in Math., Plenum Press, New York 1987.
- [VV85] Claudio Verdi, Augusto Visintin, *Numerical approximation of hysteresis problems*, I.M.A. J. Numer. Anal. 5 (1985), 447-463.
- [VV89] Claudio Verdi, Augusto Visintin, *Numerical approximation of the Preisach model for hysteresis*, Math. Model. and Numer. Anal. 23 (1989), 335-356.
- [V84] Augusto Visintin, *On the Preisach model for hysteresis*, Nonlinear Analysis, T.M.A. 9 (1984), 977-996.
- [V87] Augusto Visintin, *Rheological models and hysteresis effects*, Rend. Sem. Matem. Univ. Padova 77 (1987), 213-243.
- [V94] Augusto Visintin, *Differential models of hysteresis*, Springer, Berlin 1994.
- [W91] Wolfgang Walter, *Analysis 2*, 3. Auflage, Springer 1992.
- [Zan93] Clemens Zang, *Hysteresis - Nichtlinearitäten in der Wellengleichung*, Diplomarbeit in Mathematik an der Universität Kaiserslautern, 1993/1994.
- [Zei86] Eberhard Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications I*, Springer, New York 1986.
- [Zei90a] Eberhard Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications II/A*, Springer, New York 1990.
- [Zei90b] Eberhard Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications II/B*, Springer, New York 1990.

Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung	Seite
$Abb(0, T)$	Menge der Abbildungen vom Intervall $[0, T]$ nach \mathbb{R}	6
$\Phi_{v,y}$	Zweig des Hysterese-Operators zur Vergangenheit v und zum Anfangswert y	8
Φ_v	Zweig des Hysterese-Operators mit gedächtnisfreiem Anfangswert zur Vergangenheit v	9
\mathfrak{s}_r	Stop-Operator	9
sign	Signum-Funktion	9
γ_t	Gedächtnisfunktion	14
\mathcal{P}	Prandtl-Ishlinskii-Operator	15
ν	Verteilungsfunktion	15
H	Heaviside-Funktion	16
$S(V)$	Menge der endlichen Folgen auf der Menge V	21
$S_k(V)$	Menge der endlichen Folgen auf der Menge V mit einer Länge von mindestens $k + 1$	21
π	Projektion einer endlichen Folge auf ihre letzte Komponente	21
π_k	Projektion einer endlichen Folge auf ihre $(k+1)$ -Komponente	21
$\tilde{\mathcal{H}}$	diskreter Hysterese-Operator	22
$\tilde{\mathcal{H}}_f$	Endauswertung des diskreten Hysterese-Operators	22
$\tilde{\mathfrak{s}}_r$	diskreter Stop-Operator	22
$\tilde{\mathcal{P}}$	diskreter Prandtl-Ishlinskii-Operator	22
$\tilde{\Phi}_{\varepsilon,y}$	Zweig des diskreten Hysterese-Operators zur diskreten Vergangenheit ε und zum Anfangswert y	22
$\tilde{\Phi}_{\varepsilon}$	Zweig des diskreten Hysterese-Operators mit gedächtnisfreiem Anfangswert zur diskreten Vergangenheit ε	22
$\tilde{\gamma}_k$	diskrete Gedächtnisfunktion	25
$\tilde{\gamma}_k^{\mu}$	μ -diskretisierte Gedächtnisfunktion	38
Ψ	Formfunktion	39
Ψ_e	Erstbelastungskurve	39
$S^R(\mathbb{R})$	Menge der beschränkten, endlichen, reellen Folgen mit der Schranke $R > 0$	47
\mathfrak{H}	ortsabhängiger Hysterese-Operator	59
\mathcal{F}	Hysterese-Potential	89

Symbol	Bedeutung	Seite
$\tilde{\mathcal{F}}$	diskretes Hysterese-Potential	89
ψ_m^l	lokaler Elastizitätsmodul	96
$BV(a, b)$	Menge der Funktionen von beschränkter Variation	135
$W^{1,p}(a, b)$	Sobolev-Raum	137

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mit zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gehört Herrn Prof. Dr. Jürgen Sprekels, der mir durch die Stelle am Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS) die Rahmenbedingungen verschaffte, diese Arbeit zu schreiben, mich auf die Theorie der Hysterse-Operatoren aufmerksam machte und mich fachlich unterstützte.

Außerdem möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn Dr. Pavel Krejčí bedanken, der meine Arbeit betreute und dessen Hinweise, Ideen und Vorschläge maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Daneben halfen mir zahlreiche Kollegen vom WIAS weiter. Bei Frank Duderstadt möchte ich mich für die Informationen und Diskussionen zu Fragen der Mechanik und der Physik bedanken. Dr. Jürgen Fuhrmann gab mir Tips zur Implementierung meines Verfahrens und verringerte durch die Bereitstellung der *pdelib* den Programmieraufwand. Thomas Koprucki verdanke ich viele L^AT_EX-Ratschläge und Hilfe bei der Erstellung der Grafiken. Dr. Olaf Klein und Jens Griepentrog danke ich für Hinweise zu den Promotionsformalien. Auf Peter Philip konnte ich bei den vielen kleinen Fragen zwischendurch zählen, seien sie mathematischer, orthografischer oder technischer Natur. Aufgemuntert haben mich die vielen gemeinsamen Mensabesuche mit Martin Petzoldt und die Gespräche mit Dr. Christoph Külske und Jenny Niebsch. Sie motivierten mich, auch in schweren Zeiten weiterzumachen.

Bei meinen Freunden Stephan Frieze, Matthias Läuter und Heiko Jansen möchte ich mich für das Korrekturlesen dieser Arbeit und insbesondere bei Stephan Frieze für viele mathematische Diskussionen bedanken.

Meinen ehemaligen Mitbewohnerinnen Josephine Riemann und Grit Töpper danke ich für die nötige Ablenkung zwischendurch.

Außerdem möchte ich mich bei den Frauen bedanken, die mich durch ihr Vorbild oder ihren Zuspruch zur Aufnahme des Studiums und zur Fortführung meiner wissenschaftlichen Laufbahn bis zur Promotion ermutigt haben.